

Nome:

RA:

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: Determine os valores de a e b para os quais o sistema abaixo deixa de ser controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} x$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: Determine os autovalores associados aos modos observáveis e não observáveis, controláveis e não controláveis (justifique) para o sistema

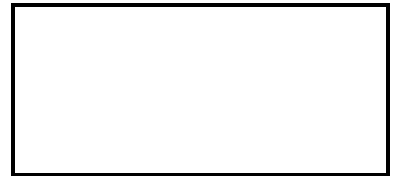
$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x, \quad y = [2 \quad 1] v, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda-6)(\lambda-8)$$

3ª Questão: O sistema abaixo: a) É controlável? b) É observável? Justifique.

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad y = [0 \quad 4 \quad 2] v$$

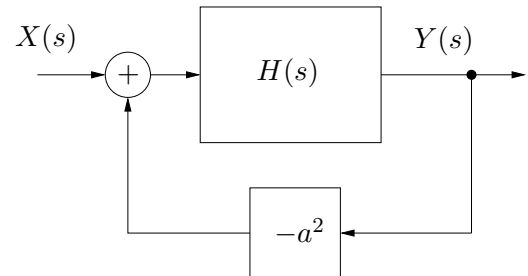
4ª Questão: Determine o número de raízes do polinômio $D(p)$ com parte real positiva.

$$D(p) = p^5 + p^4 + 7p^3 + 3p^2 + 5p + 1$$



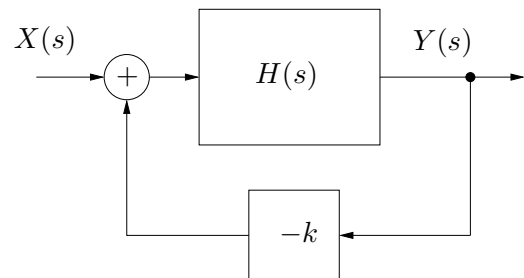
5ª Questão: Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro a , para $a = 1$

$$H(s) = \frac{a(s-2)}{s^2 - 2as - 5a}$$



6ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 7s + 10}$$



7ª Questão: O sistema linear invariante no tempo dado abaixo é estável, assintoticamente estável ou instável? Justifique

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} v$$



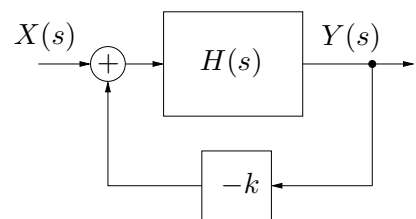
8ª Questão: Certifique a estabilidade assintótica da origem e determine o domínio de estabilidade Ω (isto é, o conjunto no espaço de estados, em termos do parâmetro α) utilizando a função de Lyapunov $\psi(v) = v^2$ para

$$\dot{v} = v(5\alpha v^2 - 1/\alpha), \quad \alpha > 0, v \in \mathbb{R}$$



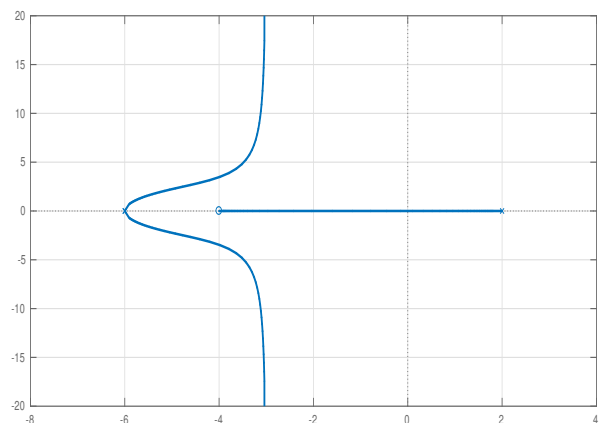
9ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com

$$H(s) = \frac{(s+4)^3}{(s+10)(s+3)(s+2)(s-4)^3}$$



Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes (eixo real e assíntotas) para o sistema realimentado, determinando o ponto de encontro das assíntotas

10ª Questão: No lugar das raízes da figura (três polos em -6 , -6 e 2 ; zero em -4), determine o valor de k no cruzamento com o eixo imaginário.



$M_{dB}(\omega) = 20 \log M(\omega)$ sendo log o logaritmo na base 10

Lyapunov: Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(v) > 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\} \quad \text{e} \quad \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): A solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q, \forall Q = Q' > 0$, é única, simétrica e definida positiva SSE todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa (\equiv assintoticamente estável)

Controlabilidade e Observabilidade: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Controlável se e somente se:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} = n, \quad \text{ou} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} A - \lambda I & b \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda \text{ autovalor}$$

Observável se e somente se:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} = n, \quad \text{ou} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ c \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda \text{ autovalor}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$

Se rank de $\text{Ctrb}(A, b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\text{Ctrb}(A, b)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x, \quad y = [\bar{c}_c \quad \bar{c}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se rank de $\text{Obsv}(A, c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\text{Obsv}(A, c)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x, \quad y = [\bar{c}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Sensibilidade de $f(x, y)$ em relação a x : $\frac{x}{f} \frac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0, H(s) = N(s)/D(s) \Rightarrow D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^m \alpha_r s^r, \quad \alpha_m = 1, \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os polos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \rightarrow +\infty$.

3) Condição de fase: $\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^m \phi_r(s) = \pi$

sendo $\phi_r(s) = \angle(s - \lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s - \gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $k = \left(\prod_{r=1}^m |s - \lambda_r| \right) / \left(\prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r| \right)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de polos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos polos: $\phi_i(s) \Big|_{s \approx \lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^m \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\varphi_i(s) \Big|_{s \approx \gamma_i} = \sum_{r=1}^m \phi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\frac{\pi(1 + 2r)}{m - \ell}, \quad \beta_{\ell} > 0, \quad r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\frac{1}{\eta} \left(\sum_{r=1}^m \text{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \text{Re}(\gamma_r) \right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s) + kN(s) = 0$