1ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v} = v(v-1)(v+2) = v^3 + v^2 - 2v$$

b) Usando uma aproximação linear, determine o comportamento (local) em cada um dos pontos de equilíbrio

Pontos de equilíbrio

$$(0), \quad (1), \quad (-2)$$

Aproximação linear:

$$\dot{v} = [3v^2 + 2v - 2]v$$

$$(0) : \dot{v} = [-2]v \text{ assint. estável}, \quad (1) : \dot{v} = [3]v \text{ instável}, \quad (-2) : \dot{v} = [6]v \text{ instável}$$

2ª Questão: a) Determine os cinco pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{v}_1 &= v_2(v_2-1)(v_1-2) - 3x = v_1 v_2^2 - v_1 v_2 - 2v_2^2 + 2v_2 - 3x \\
\dot{v}_2 &= v_1(v_1+2)(v_2+1) + 2x^2 = 2v_1 + v_1^2 v_2 + v_1^2 + 2v_1 v_2 + 2x^2
\end{aligned}$$

b) Determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$(0,0),\ (0,1),\ (2,-1),\ (-2,0),\ (-2,1)$$

$$A = \begin{bmatrix} v_2^2 - v_2 & 2v_1 v_2 - v_1 - 4v_2 + 2 \\ 2v_1 v_2 + 2v_1 + 2v_2 + 2 & v_1^2 + 2v_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 4x \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^3 - 7p^2 - 6p - 5)y(t) = (3p^3 - 22p^2 - 20p - 18)x(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad d = 3$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$

b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1} v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4s - 13}{s^2 + 5s + 6} = \frac{-21}{s+2} + \frac{25}{s+3}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(-21\exp(-2t) + 25\exp(-3t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Determine uma matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ que satisfaça

$$A^{-4} + 2A^{-3} + 3A^{-2} + 4A^{-1} = \mathrm{I}$$

$$A^4 - 4A^3 - 3A^2 - 2A - \mathrm{I} = 0 \quad \Delta(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A) = (\lambda - 3)^3$$

$$\mathrm{diag}(J_2(3), J_1(3)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $v(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = Av = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} 2\exp(-2t) - \exp(-3t) \\ 3\exp(-3t) - 4\exp(-2t) \end{bmatrix}$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 15 & -11 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & c \\ (3/2)a & (5/3)c \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = (t+2)\,\mathrm{sen}(t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a resposta ao impulso $h(t)$, $t \geq 0$ (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -13 & -4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 23 & 4 \end{bmatrix} v$$

$$H(s) = \frac{4s+23}{s^2+4s+13} = \frac{5(3)}{(s+2)^2+9} + \frac{4(s+2)}{(s+2)^2+9}, \quad h(t) = \big(5\exp(-2t)\mathrm{sen}(3t) + 4\exp(-2t)\cos(3t)\big)u(t)$$