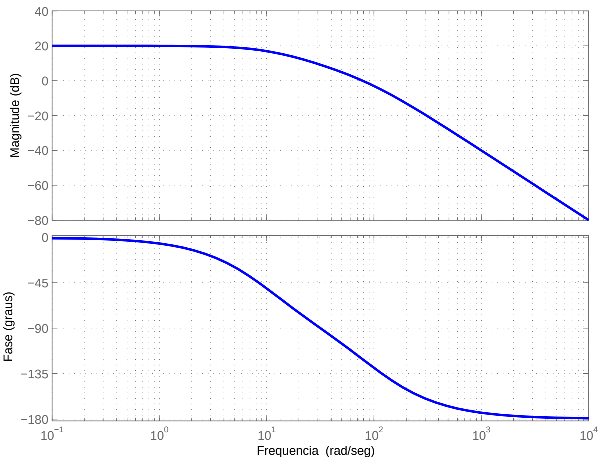
Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: Considerando o diagrama de Bode (módulo e fase) de um sistema linear invariante no tempo dado abaixo, determine a solução forçada para a entrada $x(t) = 5 + 5\cos(300t)$.



1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: Determine a resposta ao degrau $y_u(t)$ (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

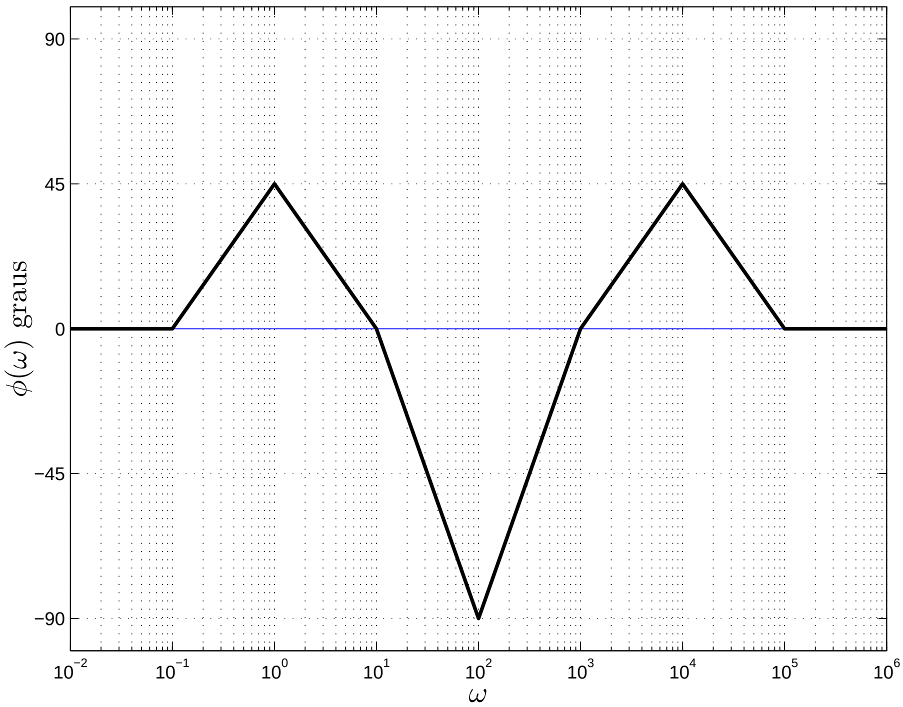
$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 7\ddot{x} + 15\dot{x} + 65x$$

3ª Questão: a) Determine a transformada unilateral de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, sendo $y(t)$ a solução da equação diferencial abaixo

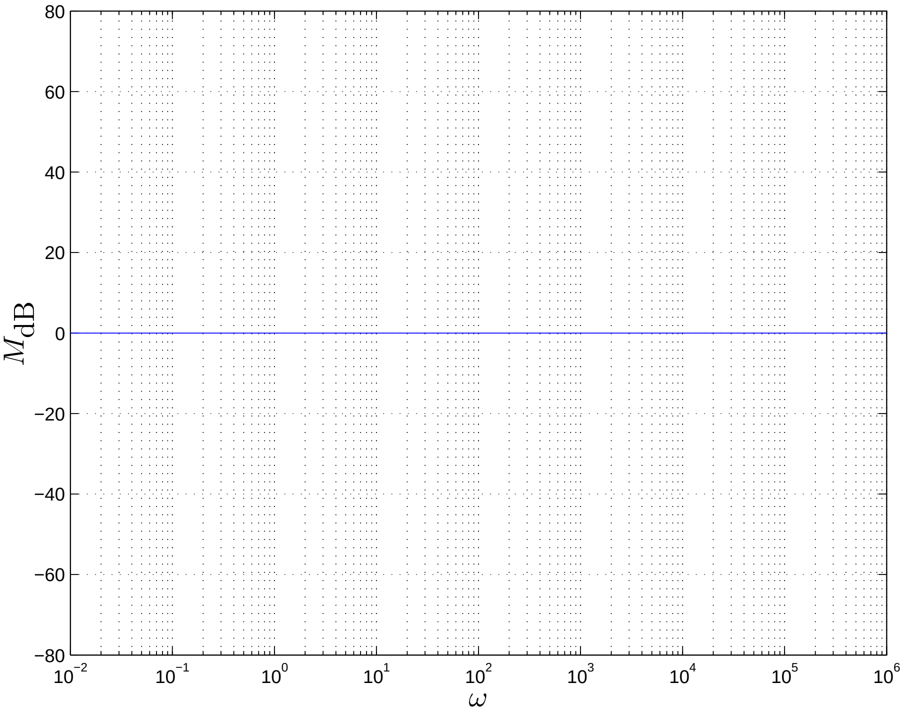
$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = 0, \quad y(0),\ \dot{y}(0) \text{ dados}$$

b) Determine $\dot{y}(0)$ em função de $y(0)$ para que a solução seja $y(t) = y(0)\exp(-4t)u(t)$.

4ª Questão: Considere as assíntotas da fase do diagrama de Bode em escala logarítmica da função de transferência de um sistema linear invariante no tempo de fase mínima da figura abaixo.



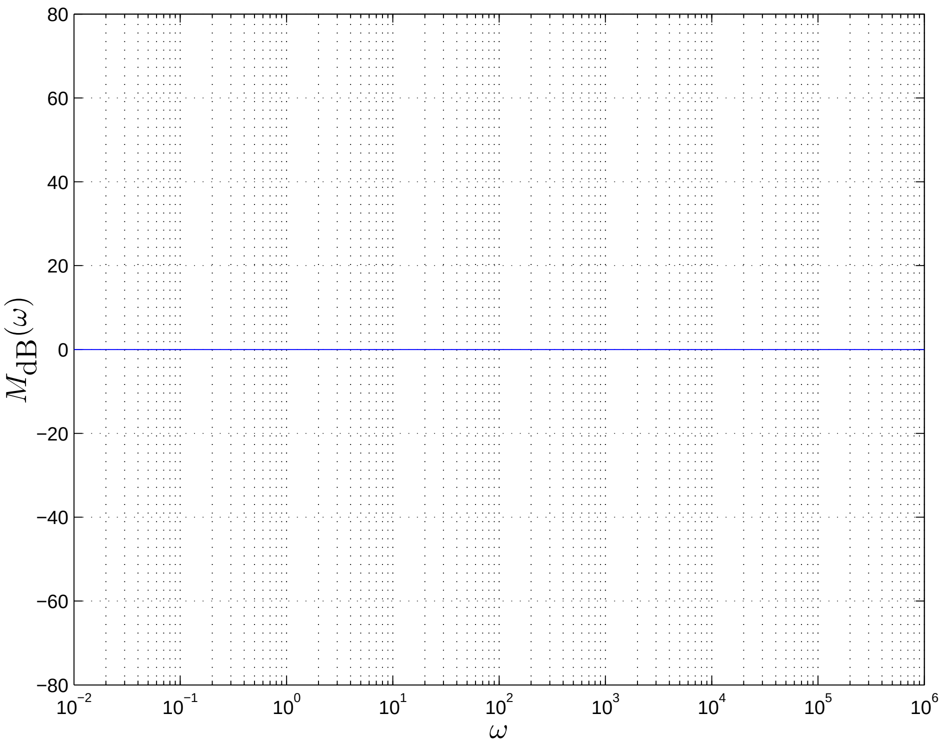
a) Sabendo que o ganho DC é 0 dB, esboce as assíntotas do módulo (em dB)



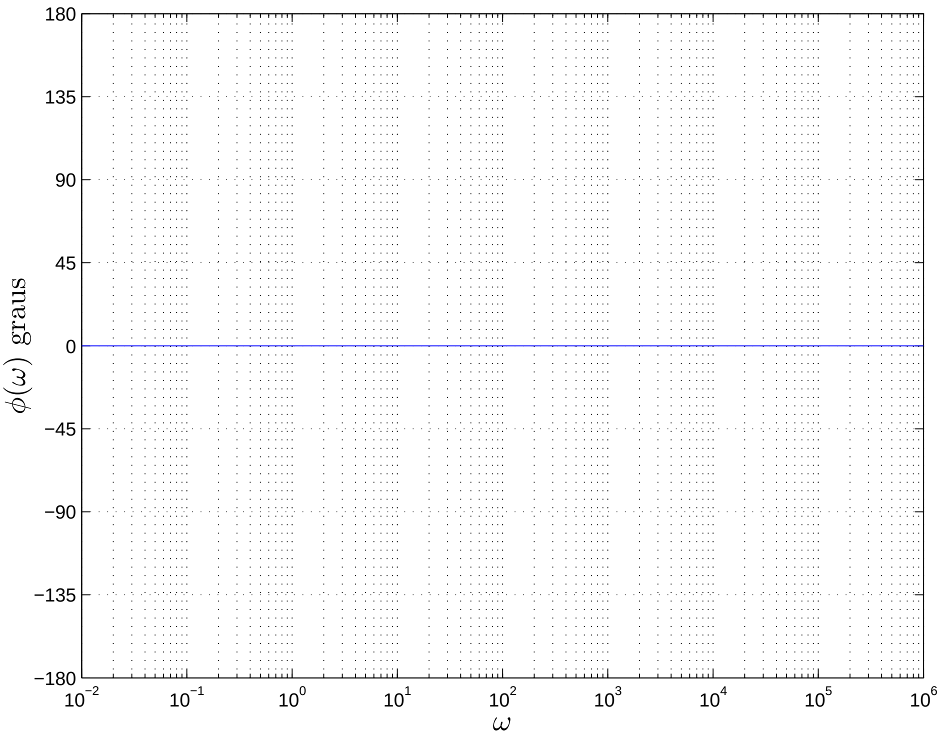
b) Baseando-se nos diagramas assintóticos de módulo e fase, determine a solução forçada do sistema para a entrada $x(t) = \cos(10t) + \text{sen}(1000t)$

5ª Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{100(s+10)^2}{s(s^2+20s+100^2)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



6ª Questão: Determine a solução forçada quando a entrada é dada por $x(t) = t$ para o sistema linear invariante no tempo causal cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

7ª Questão: Determine a equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem como solução

$$y(t) = 2\exp(-2t) + \exp(-t)\big(\cos(2t) - 5\,\mathrm{sen}(2t)\big)$$

8ª Questão: Determine a solução $y(t)$ da equação diferencial

$$(p^2+4)y = 8\cos(2t) - 12\,\mathrm{sen}(2t), \qquad y(0) = 10,\ \dot{y}(0) = 11$$

9ª Questão: a) Determine $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução da equação a diferenças abaixo

$$y[n+2] + 6y[n+1] + 8y[n] = -2(-3)^n, \quad y[0] = 6,\ y[1] = -20$$

b) Determine a solução $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

10ª Questão: a) Determine a solução forçada $y_f[n]$ da equação a diferenças

$$\underbrace{(p^2+4p+3)}_{(p+1)(p+3)}y[n] = y[n+2] + 4y[n+1] + 3y[n] = -8(-1)^n$$

b) Determine a solução para $y[0] = 5,\ y[1] = -15$

$$u(t) \text{ (função degrau)}, \quad \delta(t) \text{ (função impulso)}, \quad \delta(t) = \frac{d}{dt}u(t), \quad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta)d\beta$$

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt, \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0), \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0), \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m\mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}x^{(k)}(0)$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\Big\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \ , \ \ \mathrm{Re}(s+a) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2} \ \ , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2} \ \ , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to+\infty} sX(s) \ , \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais): $py(t) \triangleq \dfrac{d}{dt}y(t)$

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(t), \quad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\dots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \ \ , \ \text{ se } \ \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \ \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \ , \ D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k g_k(t), \quad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Resposta em Frequência: $H(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a frequência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) \quad \text{(sendo log o logaritmo na base 10)}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (frequência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta frequência

Pólos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}$, $\quad \mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1, \quad \mathcal{Z}\{\delta[n+m]\} = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Z}\{x[n+1]u[n]\} = z\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - zx[0], \quad \mathcal{Z}\{x[n+2]u[n]\} = z^2\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - z^2x[0] - zx[1],$$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\big\{a^n u[n]\big\} = \frac{z}{z-a}, \quad \mathcal{Z}\big\{na^n u[n]\big\} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad \mathcal{Z}\big\{n^2a^n u[n]\big\} = \frac{az^2 + a^2z}{(z-a)^3}, \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}, \; \mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^n u[n]\right\} = \frac{z^{(m+1)}}{(z-a)^{(m+1)}}, \; m \in \mathbb{N}, |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\big\{nx[n]\big\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\big\{x[n]\big\}$$

Coeficientes a determinar (equações a diferenças): $py[n] \triangleq y[n+1]$

$$D(p)y[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k[n] \qquad f_k[n] \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então λ^n, $n\lambda^n$, $\ldots$, $n^{r-1}\lambda^n$ são modos próprios.

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \quad , \quad \text{se } \bar{D}(p)x[n] = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f[n] = N(p)x[n] \; , \; D(p)y_h[n] = 0$$

$y_f[n]$: combinação linear dos modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)