1ª Questão: Determine a solução forçada para a entrada $x = 10$ do sistema linear invariante no tempo BIBO estável cuja realização (A, b, c, d) é dada por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} x \tag{1}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} x \tag{2}$$

$$H(s) = 5, \quad y_f(t) = H(0) \times 10 = 50$$

2ª Questão: Determine os autovalores associados aos modos observáveis e não observáveis (justifique) para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} v \ , \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} v, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 5)$$

Autovalores: 5 (observável) e 3 (não observável), pois

$$M_3 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \ \text{rank} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \ \text{(não observ.)}, \quad M_5 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \ \text{(observ.)}$$

3ª Questão: Para o sistema linear invariante no tempo dado abaixo, determine:

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 1 & 3\alpha \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} v$$

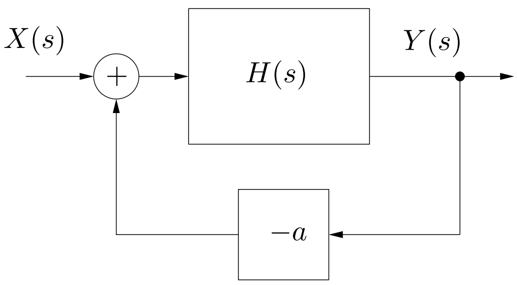
a) Os valores de α para os quais o sistema é controlável
b) Os valores de α para os quais o sistema é observável

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3\alpha^2 \\ 0 & 2\alpha + 1 & \alpha + 6\alpha^2 \\ 1 & 3\alpha & 2\alpha + 1 + 9\alpha^2 \end{bmatrix}, \ \det(\text{Ctrb}(A, b)) = 8\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0, \ \alpha \neq -0.25 \pm 0.25j \ \text{contr.}$$

b) $\alpha \neq 0$: observável

4ª Questão: Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro a, para $a = 2$

$$H(s) = \frac{a^2}{s^2 + 2as + a}$$



$$G(s) = \frac{a^2}{s^2 + 2as + a + a^3} \ , \quad \frac{\partial G}{\partial a} \frac{a}{G} = \frac{2s^2 + 2as + a - a^3}{s^2 + 2as + a + a^3} \bigg|_{s=0, a=2} = -3/5 = -0.60$$

5ª Questão: Utilizando a tabela de Routh-Hurwitz, determine quantas raízes do polinômio $D(s)$ possuem parte real positiva. Justifique a resposta.

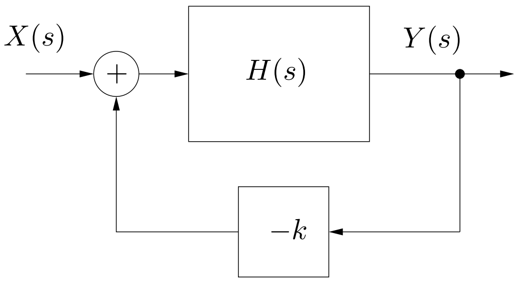
$$D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 5s + 1$$

s^5	1	5	5
s^4	4	6	1
s^3	14/4	19/4	
s^2	8/14	1	
s	$-11/2$		
1	1		

Duas trocas de sinal $\Rightarrow$ duas raízes com parte real positiva.

6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in [0, +\infty)$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + s + 1}{20s^3 + 5s^2 + 5s + 1}$$



$$D(s) = (k + 20)s^3 + (2k + 5)s^2 + (k + 5)s + (k + 1) \quad , \quad 0 < k < 1, \; k > 5$$

7ª Questão: O sistema linear invariante no tempo dado abaixo é estável, assintoticamente estável ou instável? Justifique

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v$$

Assintoticamente estável, pois todos os autovalores possuem parte real negativa.

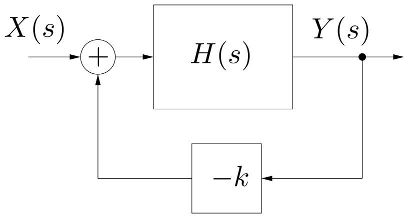
8ª Questão: Conclua (com justificativa) sobre a estabilidade assintótica do sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av$ resolvendo a equação de Lyapunov $A'P + PA + 40\mathrm{I} = 0$ para

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}, \quad A'P + PA = \begin{bmatrix} -18p_1 + 2p_2 + 40 & -20p_1 - 9p_2 + p_3 \\ -20p_1 - 9p_2 + p_3 & -40p_2 + 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 7/3 & 1 \\ 1 & 167/3 \end{bmatrix}, \quad P \text{ definida positiva } (2 > 0 \text{ e } \det(P) > 0)\text{, sistema assint. estável}$$

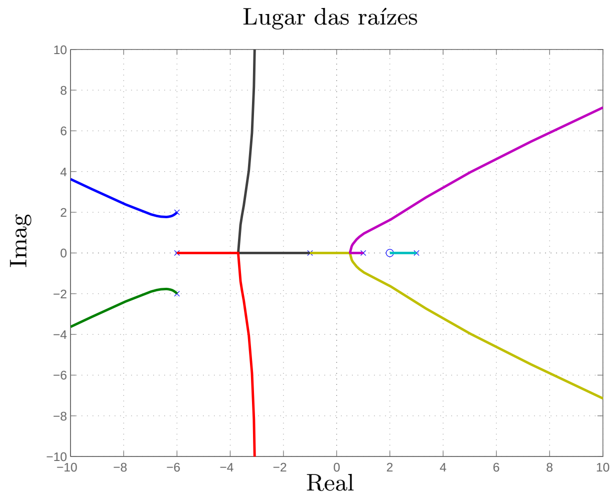
9ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com



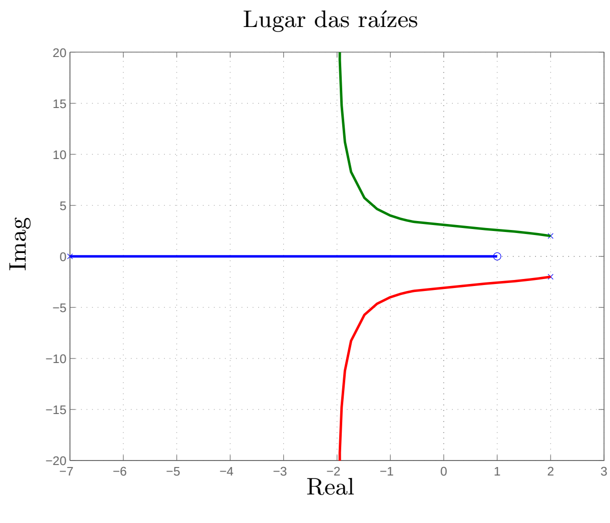
$$H(s) = \frac{s-2}{(s+6)(s+6+2j)(s+6-2j)(s+1)^2(s-1)(s-3)}$$

Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes para o sistema realimentado (eixo real e assíntotas), determinando o ponto de encontro das assíntotas

$$\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \quad (-6-6-6-1-1+1+3-(2))/6 = -3$$



10ª Questão: No lugar de raízes mostrado na figura, com pólos em $2 \pm 2j$, -7 e um zero em -1, sabendo que o cruzamento com o eixo imaginário ocorre em 0 e $\pm 3j$, determine o intervalo para o ganho $k \geq 0$ que garante a estabilidade do sistema em malha fechada.



Ponto $\pm 3j$: $k = \dfrac{|3j-(2+2j)||3j-(2-2j)||3j-(-7)|}{|3j-1|} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{58}\sqrt{29}}{\sqrt{10}} = 29$

Ponto 0: $k = \dfrac{|-(2+2j)||-(2-2j)||-(-7)|}{|-1|} = \dfrac{\sqrt{8}\sqrt{8}(7)}{1} = 56$

$$29 < k < 56$$