Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: Determine a solução forçada para a entrada $x = 10$ do sistema linear invariante no tempo BIBO estável cuja realização (A, b, c, d) é dada por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} x \tag{1}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} x \tag{2}$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: Determine os autovalores associados aos modos observáveis e não observáveis (justifique) para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} v \ , \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} v, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 5)$$

3ª Questão: Para o sistema linear invariante no tempo dado abaixo, determine:

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 1 & 3\alpha \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

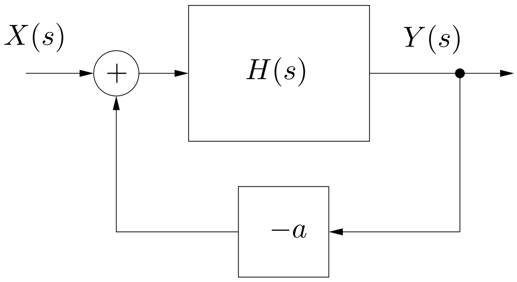
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} v$$

a) Os valores de α para os quais o sistema é controlável

b) Os valores de α para os quais o sistema é observável

4ª Questão: Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro a, para $a = 2$

$$H(s) = \frac{a^2}{s^2 + 2as + a}$$

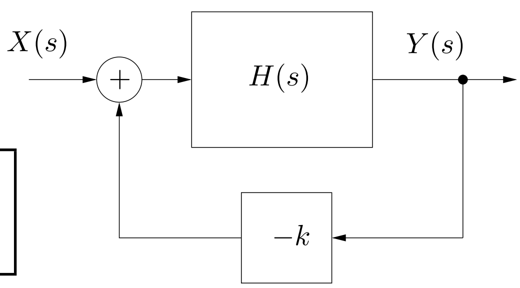


5ª Questão: Utilizando a tabela de Routh-Hurwitz, determine quantas raízes do polinômio $D(s)$ possuem parte real positiva. Justifique a resposta.

$$D(s) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 5s + 1$$

6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in [0, +\infty)$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + s + 1}{20s^3 + 5s^2 + 5s + 1}$$



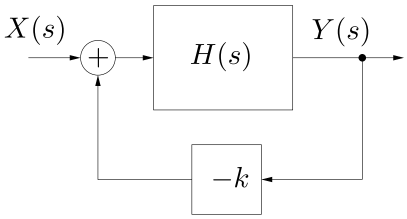
7ª Questão: O sistema linear invariante no tempo dado abaixo é estável, assintoticamente estável ou instável? Justifique

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v$$

8ª Questão: Conclua (com justificativa) sobre a estabilidade assintótica do sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av$ resolvendo a equação de Lyapunov $A'P + PA + 40\mathrm{I} = 0$ para

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

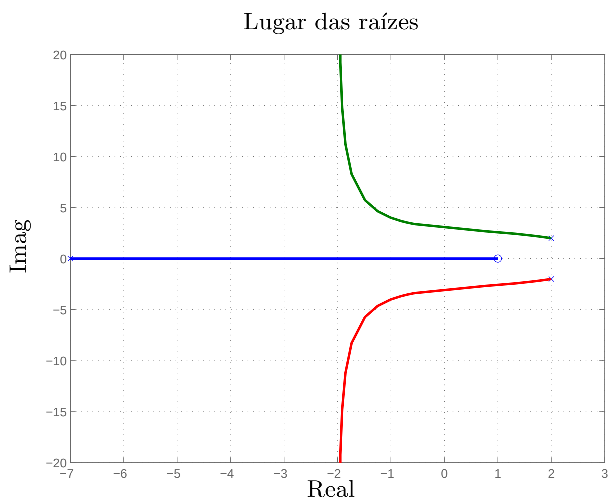
9ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com



$$H(s) = \frac{s-2}{(s+6)(s+6+2j)(s+6-2j)(s+1)^2(s-1)(s-3)}$$

Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes para o sistema realimentado (eixo real e assíntotas), determinando o ponto de encontro das assíntotas

10ª Questão: No lugar de raízes mostrado na figura, com pólos em $2 \pm 2j$, -7 e um zero em -1, sabendo que o cruzamento com o eixo imaginário ocorre em 0 e $\pm 3j$, determine o intervalo para o ganho $k \geq 0$ que garante a estabilidade do sistema em malha fechada.



$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega)$ sendo log o logaritmo na base 10

Lyapunov: Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\} \ \text{ e } \ \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): A solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$, $\forall Q = Q' > 0$, é única, simétrica e definida positiva SSE todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa ($\equiv$ assintoticamente estável)

Controlável se e somente se $\mathit{rank}\big(\text{Ctrb}(A, b)\big) = n$. Observável se e somente se $\mathit{rank}\big(\text{Obsv}(A, c)\big) = n$.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$

Se *rank* de $\text{Ctrb}(A, b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\text{Ctrb}(A, b)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se *rank* de $\text{Obsv}(A, c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\text{Obsv}(A, c)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} \bar{c}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Sensibilidade de $f(x, y)$ em relação a x: $\dfrac{x}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \ \Rightarrow \ D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \ , \ \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os pólos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \to +\infty$.

3) Condição de fase: $\displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) = \pi$

sendo $\phi_r(s) = \angle(s - \lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s - \gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $\displaystyle k = \Big(\prod_{r=1}^{m} |s - \lambda_r|\Big) / \Big(\prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r|\Big)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos pólos: $\displaystyle \phi_i(s)\Big|_{s\approx\lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{m} \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\displaystyle \varphi_i(s)\Big|_{s\approx\gamma_i} = \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\dfrac{\pi(1 + 2r)}{m - \ell} \quad , \quad \beta_\ell > 0 \quad , \quad r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\displaystyle \frac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m} \text{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \text{Re}(\gamma_r)\right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s) + kN(s) = 0$