1ª Questão: Para $x = 1$, determine: a) Os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v}_1 = -(v_1 - 1)v_2 + 5(x - 1)$$
$$\dot{v}_2 = -(v_2 - 2)v_1 + 3(1 - x)$$

b) Para $x = 1$, determine o sistema linearizado $\dot{v} = Av + bx$ em cada um dos pontos de equilíbrio

Pontos de equilíbrio: $(0,0), (1,2)$, Aproximação linear: $\dot{v} = \begin{bmatrix} -v_2 & -(v_1 - 1) \\ -(v_2 - 2) & -v_1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} x$

$$(0,0): \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1,2): \ A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2ª Questão: Usando a aproximação linear, conclua sobre o comportamento do sistema da **Questão 1** em cada um dos pontos de equilíbrio (assintoticamente estável, instável ou nada se pode afirmar). Justifique.

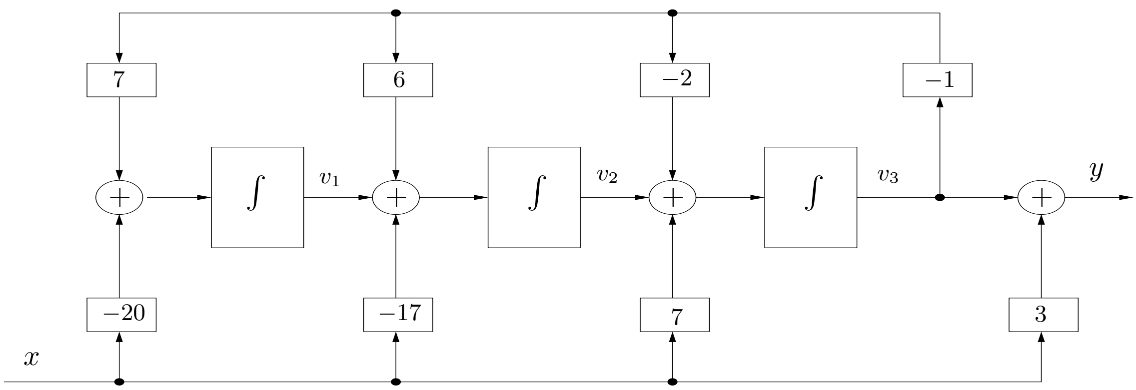
$$(0,0): \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \Delta(\lambda) = \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = +\sqrt{2}, \ \lambda_2 = -\sqrt{2}, \text{ instável (autovalor positivo)}$$

$$(1,2): \ A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \Delta(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2, \text{ assint. estável (autovalores negativos)}$$

3ª Questão: Complete o desenho para que a realização represente o sistema descrito por

$$(p^3 - 2p^2 + 6p + 7)y(t) = (3p^3 + p^2 + p + 1)x(t), \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$\beta_3 = 3 \ , \ \bar{N}(p) = 7p^2 - 17p - 20 \ , \ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{bmatrix} -20 \\ -17 \\ 7 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ d = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$



4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$
b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 & 1 \\ -1 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3s - 11}{(s-4)^2 + 1} = \frac{3(s-4)}{(s-4)^2 + 1} + \frac{1}{(s-4)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(3\exp(4t)\cos(t) + \exp(4t)\mathrm{sen}(t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Usando o Teorema de Cayley-Hamilton, determine $A^3 - 10A^2 + 31A$ para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 12 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 31\lambda - 30, \quad A^3 - 10A^2 + 31A = 30\mathbf{I}$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A) = \lambda^3, \quad J_3(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $v(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = Av = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dado que

$$\bar{v} = Pv, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\bar{v}} = \left(PAP^{-1}\right)\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \bar{v}$$

$$v(t) = P^{-1}\bar{v}(t), \quad \bar{v}(0) = Pv(0),$$

$$\bar{v}(t) = \exp\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} t\right)\bar{v}(0) = \begin{bmatrix} \exp(2t) & 0 \\ 0 & \exp(3t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\exp(2t) \\ 4\exp(3t) \end{bmatrix}, \quad v(t) = \begin{bmatrix} 9\exp(2t) - 8\exp(3t) \\ 4\exp(3t) - 3\exp(2t) \end{bmatrix}$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & c \\ -3a & -6c \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = 10t\exp(5t)\cos(3t) - 5t\exp(5t)\mathrm{sen}(3t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a resposta ao degrau $y_u(t)$, $t \geq 0$, do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 70 & 26 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix} x, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = u(t) \ \text{(função degrau)}$$

$$H(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b + d = \frac{13s^2 + 117s + 200}{s^2 + 7s + 10} = \frac{13s^2 + 117s + 200}{(s+2)(s+5)}, \quad y_u(t) = \big(20 - 4\exp(-5t) - 3\exp(-2t)\big)u(t)$$