1ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v} = v^2 - 1 = (v+1)(v-1)$$

b) Avalie o comportamento (estável, assintoticamente estável ou instável) em torno de cada ponto de equilíbrio usando uma aproximação linear

Pontos de equilíbrio: $(v = 1),\ (v = -1)$
Aproximação linear: $\dot{v} = [2v]\, v$

$$(v = 1) : \dot{v} = 2v \text{ (instável)}, \quad (v = -1) : \dot{v} = -2v \text{ (assint. estável)}$$

2ª Questão: a) Determine o sistema linearizado $\dot{v} = Av + bx$ em torno do ponto de equilíbrio, para $x = 0$, dado por $(-1, 2)$ do sistema não linear

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (v_1^2 - 1)v_2 + (v_2^2 - 4)v_1 + 3x \\ \dot{v}_2 &= (v_1^2 - 1)v_1 v_2 + (v_2^2 - 4)v_1 v_2 + 2x^2 \end{aligned}$$

b) Conclua sobre o comportamento aproximado do sistema em torno do $(-1, 2)$ (estável, assintoticamente estável ou instável). Justifique.

$$(-1, 2),\ x = 0 \qquad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda^2 + 12\lambda + 48$$

Comportamento assintoticamente estável, pois os autovalores possuem parte real negativa.

3ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^3 + 10p^2 + 9p + 8)y(t) = (2p^3 + 22p^2 + 21p + 17)x(t), \ p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -9 & -10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$

b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s - 4}{s^2 + 7s + 12} = \frac{12}{s+4} - \frac{10}{s+3}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(12\exp(-4t) - 10\exp(-3t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Determine o polinômio característico $\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A)$ da matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ que satisfaz

$$A^2(A^2 + 4\mathrm{I}) = -A^2(5A + 3A^{-1} + 2A^{-2}), \quad \Rightarrow \quad \Delta(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = (\lambda - 1)^3$$

$$J_3(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $y(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} v$$

$$y(t) = t \exp(t)\ \mathrm{sen}(t)$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & c \\ -2a & a - 2c \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = t + \cos(3t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a resposta à rampa $y_r(t)$, $t \geq 0$, do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = tu(t) \ \ \text{(função rampa)}$$

$$H(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b = \frac{2}{s+2} \ , \ \ Y_r(s) = H(s)\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{0.5}{s} + \frac{0.5}{s+2}$$

$$y(t) = \big(t - 0.5 + 0.5\exp(-2t)\big)u(t)$$