1ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v} = v^3 - 6v^2 + 11v + 6 = (v-1)(v-2)(v-3)$$

b) Avalie o comportamento (assintoticamente estável ou instável) em torno de cada ponto de equilíbrio usando uma aproximação linear

Pontos de equilíbrio: $(v=1), (v=2), (v=3)$

Aproximação linear: $\dot{v} = \left[3v^2 - 12v + 11\right] v$

$$(v=1) : \dot{v} = 2v \text{ (instável)}, \quad (v=2) : \dot{v} = -v \text{ (assint. estável)}, \quad (v=3) : \dot{v} = 2v \text{ (instável)}$$

2ª Questão: a) Determine o sistema linearizado $\dot{v} = Av + bx$ em torno do ponto de equilíbrio, para $x = 0$, dado por $(1,2)$ do sistema não linear

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= (v_1^2 - 1)v_2 + (v_2^2 - 4)v_1 + 3x \\ \dot{v}_2 &= (v_1^2 - 1)v_1 v_2 + (v_2^2 - 4)v_1 v_2 + 2x^2\end{aligned}$$

b) Conclua sobre o comportamento aproximado do sistema em torno do $(1,2)$ (estável, assintoticamente estável ou instável). Justifique.

$$(1,2),\ x=0 \qquad \Rightarrow \quad \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda^2 - 12\lambda + 16$$

Comportamento instável, pois os autovalores possuem parte real positiva.

3ª Questão: Complete os valores para que a realização (A, b, c, d) represente o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^3 + 10p^2 + 11p + 12)y(t) = (4p^3 + 3p^2 + 2p + 1)x(t), \ p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{\text{-12}} \\ 1 & 0 & \boxed{\text{-11}} \\ 0 & 1 & \boxed{\text{-10}} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \boxed{\text{-47}} \\ \boxed{\text{-42}} \\ \boxed{\text{-37}} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \boxed{4}$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$

b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+9 & 20 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s - 10}{s^2 + 9s + 20} = \frac{20}{s+5} - \frac{18}{s+4}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(20\exp(-5t) - 18\exp(-4t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Determine o polinômio característico $\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A)$ da matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ que satisfaz

$$A^2(\mathrm{I} + A^2) = (A + A^{-1})A^2, \quad \Rightarrow \quad \Delta(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = (\lambda - 2)^3$$

$$J = \text{diag } (J_2(2), J_1(2)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $y(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} v$$

$$y(t) = 2t \exp(2t) \cos(3t)$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} 2a & (a+4d)/2 \\ a & d \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = 1 + t - \ \text{sen}(t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a resposta ao degrau $y_u(t)$, $t \geq 0$, do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} -8 & -10 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} x, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = u(t) \ \ \text{(função degrau)}$$

$$H(s) = \frac{-8 - 10s}{s^2 + 3s + 2} + 10 = \frac{10s^2 + 22s + 10}{(s+1)(s+2)} \ , \quad Y_u(s) = H(s)\frac{1}{s} = \frac{5}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

$$y(t) = \big(5 + 2\exp(-t) + 3\exp(-2t)\big)u(t)$$