

Nome:

RA:

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v} = v^3 - 6v^2 + 11v - 6 = (v - 1)(v - 2)(v - 3)$$

b) Avalie o comportamento (estável, assintoticamente estável ou instável) em torno de cada ponto de equilíbrio usando uma aproximação linear

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: a) Determine o sistema linearizado $\dot{v} = Av + bx$ em torno do ponto de equilíbrio, para $x = 0$, dado por $(1, 2)$ do sistema não linear

$$\dot{v}_1 = (v_1^2 - 1)v_2 + (v_2^2 - 4)v_1 + 3x$$

$$\dot{v}_2 = (v_1^2 - 1)v_1v_2 + (v_2^2 - 4)v_1v_2 + 2x^2$$

b) Conclua sobre o comportamento aproximado do sistema em torno do $(1, 2)$ (estável, assintoticamente estável ou instável). Justifique.

3ª Questão: Complete os valores para que a realização (A, b, c, d) represente o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^3 + 10p^2 + 11p + 12)y(t) = (4p^3 + 3p^2 + 2p + 1)x(t), \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{} \\ 1 & 0 & \boxed{} \\ 0 & 1 & \boxed{} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{bmatrix}, \quad c = [0 \quad 0 \quad 1], \quad d = \boxed{}$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = [1 \quad 1] v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$

b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

5ª Questão: Determine o polinômio característico $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ da matriz $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ que satisfaz

$$A^2(I + A^2) = (A + A^{-1})A^2$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$$

7ª Questão: Determine a solução $y(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] v$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan \hat{A} da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0) = \bar{v}_0, \quad y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = 1 + t - \sin(t)$

10ª Questão: Determine a resposta ao degrau $y_u(t)$, $t \geq 0$, do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = [-8 \quad -10] v + [10] x, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = u(t) \quad (\text{função degrau})$$

Laplace (funções causais): $\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} \exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$$

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio: \bar{v} tais que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x} = \text{cte}$.

Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}$$

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} + \beta_3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2], \quad d = [\beta_3]$$

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx, \quad \frac{N(p)}{D(p)} = c(pI - A)^{-1}b + d = b'(pI - A)^{-1}c' + d$$

$$v = T\hat{v} \Rightarrow \hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{b} = T^{-1}b, \quad \hat{c} = cT, \quad T \text{ não singular}$$

A representação entrada-saída é invariante com transformações de similaridade.

$$y(t) = c \exp(At)v_0 + c(\exp(At)u(t)) * (bx(t) + dx(t)), \quad Y(s) = c(sI - A)^{-1}v_0 + (c(sI - A)^{-1}b + d)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton: } \Delta(\lambda) = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i, \quad \Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i, \quad f(\text{diag}(A_1, \dots, A_N)) = \text{diag}(f(A_1), \dots, f(A_N))$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma \end{bmatrix}, \quad f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \dots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \dots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

Forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\nu(M_\lambda) = n - \text{rank}(M_\lambda)$ (dimensão do espaço nulo de $M_\lambda = A - \lambda I$):

1) Para cada λ (multiplicidade algébrica n_λ), compute $M_\lambda = (A - \lambda I)$ e a dimensão r_λ do espaço nulo de M_λ . O número de blocos de Jordan associados a λ é igual a r_λ e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a n_λ . Note que r_λ é a multiplicidade geométrica de λ , ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a λ , $1 \leq r_\lambda \leq n_\lambda$.

2) A dimensão do maior bloco é igual ao menor k tal que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$ que é denominado k_λ . Note que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$ para $\forall k \geq k_\lambda$.

3) O número de blocos de dimensão i , $1 \leq i \leq k_\lambda$, é determinado a partir da dimensão do espaço nulo das matrizes M_λ^i . Assim, o número de blocos de dimensão i , $1 \leq i \leq k_\lambda$ pode ser determinado por

$$2\nu(M_\lambda^i) - \nu(M_\lambda^{i-1}) - \nu(M_\lambda^{i+1})$$

4) A forma de Jordan \hat{A} é a matriz bloco diagonal composta pelos blocos de Jordan de cada autovalor.

5) A transformação de similaridade Q (não singular) que produz a forma de Jordan pode ser obtida do sistema linear de equações $AQ = Q \text{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_r})$

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx, \quad v(0), \quad \text{para } x \text{ solução de } x = \bar{c}\bar{v}, \quad \dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0)$$

$$\Rightarrow \text{Sistema autônomo aumentado: } \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix}, \quad y = [c \quad d\bar{c}] \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$