Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: a) Determine a função de transferência do sistema linear invariante no tempo causal cuja resposta ao impulso (condições iniciais nulas) é dada por

$$h(t) = \delta(t) + 6\exp(-2t)u(t)$$

b) Determine a solução forçada $y_f(t)$ quando a entrada é $x(t) = 5$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

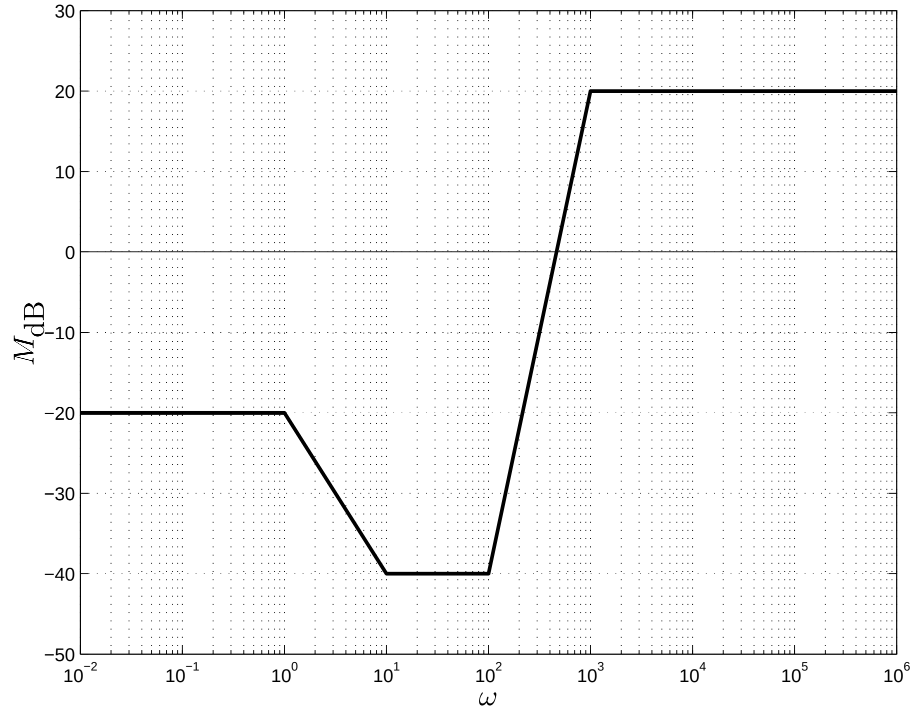
2ª Questão: Determine a resposta ao degrau (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$(p^2 + 4p + 13)y = (6p^2 + 31p + 26)x, \quad p = \frac{d}{dt}$$

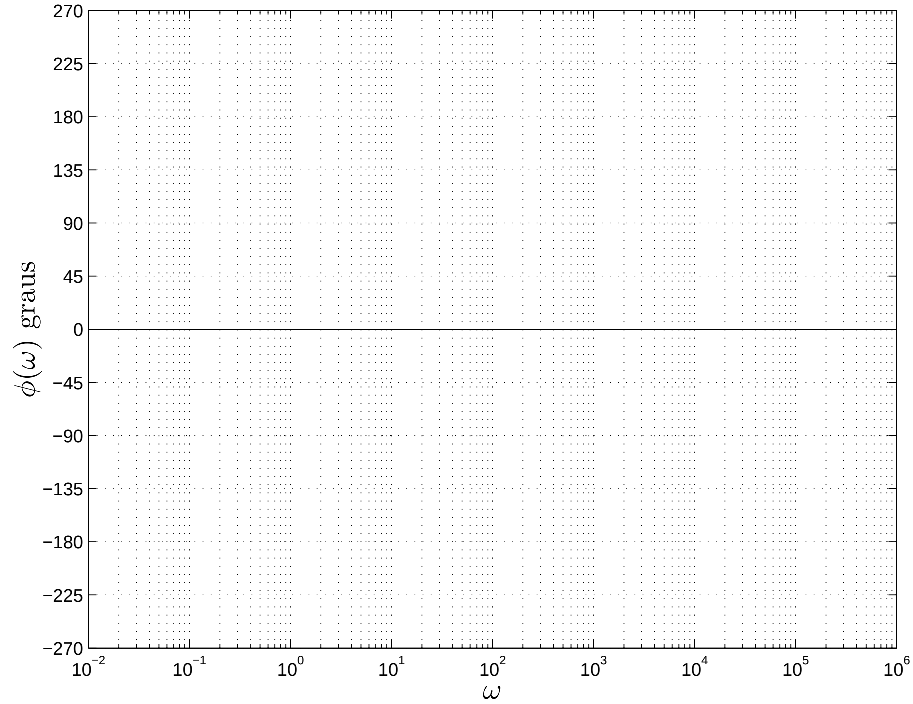
3ª Questão: Determine a transformada unilateral de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, sendo $y(t)$ a solução da equação diferencial, com $y(0) = 3$, $\dot{y}(0) = 2$ e $x(t) = 0$, do sistema linear invariante no tempo causal cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = 8\exp(-2t)\cos(4t)u(t)$$

4ª Questão: Considere as assíntotas do módulo (em dB) do diagrama de Bode em escala logarítmica da função de transferência de um sistema linear invariante no tempo de fase mínima da figura abaixo.



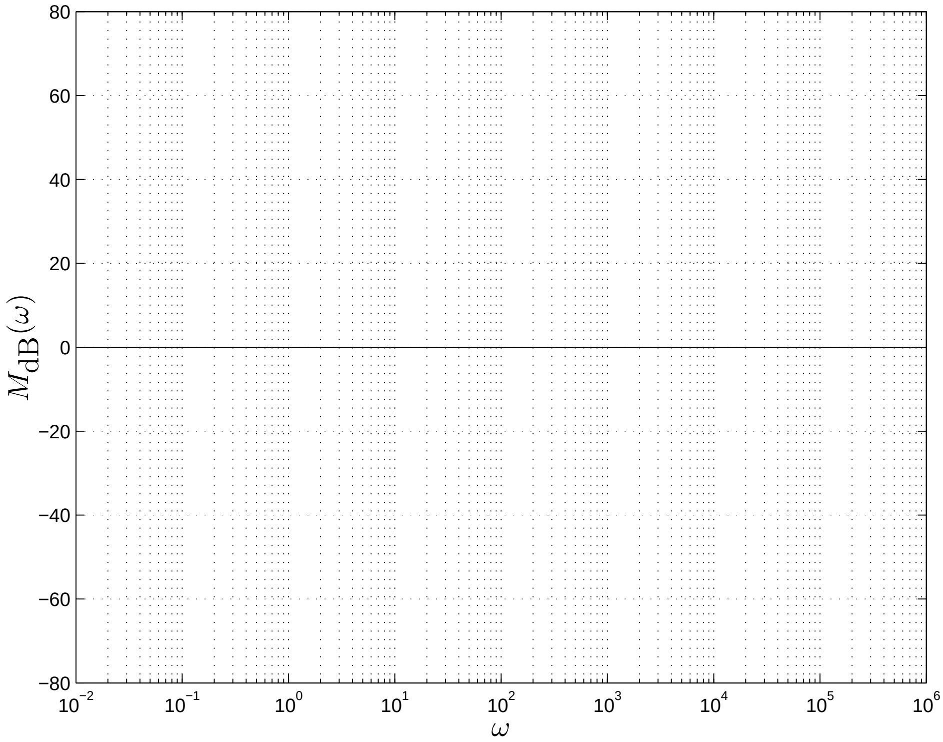
a) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema



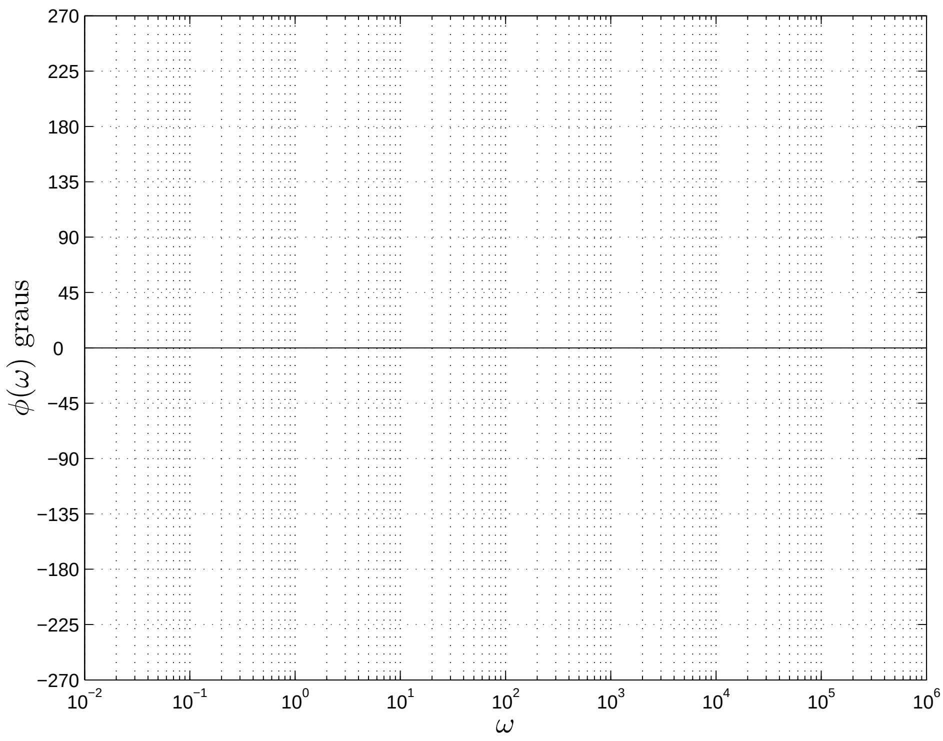
b) Baseando-se nos diagramas assintóticos de módulo e fase, determine a solução forçada do sistema para a entrada $x(t) = 100 \,\text{sen}(10t)$

5ª Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{100(s+1)(s+10)}{s(s+100)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



6ª Questão: Determine a solução forçada quando a entrada é dada por $x(t) = 4\exp(-t) - 4\exp(-5t)$ para o sistema descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 6s + 5}$$

7ª Questão: Determine a equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem como solução

$$y(t) = \exp(-2t)(t+1)^2$$

8ª Questão: Determine a solução $y(t)$ da equação diferencial

$$(p+1)^2 y = \ddot{y} + 2\dot{y} + y = \exp(-t), \qquad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad p = \frac{d}{dt}$$

9ª Questão:a) Determine $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução da equação a diferenças abaixo ($py[n] = y[n+1]$)

$$(p-2)^2 y[n] = y[n+2] - 4y[n+1] + 4y[n] = 0, \qquad y[0] = 5, \quad y[1] = 7$$

b) Determine a solução $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

10ª Questão: Determine a solução da equação a diferenças

$$(p-1)y[n] = n(n+1), \quad y[0] = 1, \quad py[n] = y[n+1]$$

$$u(t) \text{ (função degrau)}, \quad \delta(t) \text{ (função impulso)}, \quad \delta(t) = \frac{d}{dt}u(t), \quad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta)d\beta$$

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt, \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0), \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0), \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m\mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}x^{(k)}(0)$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\Big\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \ , \quad \mathrm{Re}(s+a) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2} \quad , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2} \quad , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to+\infty} sX(s) \ , \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais)

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(t), \quad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \ \text{se} \ \ \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \ \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \ , \ D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k g_k(t), \quad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Resposta em Freqüência: $H(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a freqüência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) \quad \text{(sendo log o logaritmo na base 10)}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (freqüência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta freqüência

Pólos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}$, $\quad \mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1, \quad \mathcal{Z}\{\delta[n+m]\} = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Z}\{x[n+1]u[n]\} = z\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - zx[0], \quad \mathcal{Z}\{x[n+2]u[n]\} = z^2\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - z^2x[0] - zx[1],$$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}, \quad \mathcal{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad \mathcal{Z}\{n^2a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2z}{(z-a)^3}, \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}, \ \mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^n u[n]\right\} = \frac{z^{(m+1)}}{(z-a)^{(m+1)}}, \ m \in \mathbb{N}, |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{x[n]\}$$

Coeficientes a determinar (equações a diferenças)

$$D(p)y[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k[n] \quad f_k[n] \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então λ^n, $n\lambda^n$, $\ldots$, $n^{r-1}\lambda^n$ são modos próprios.

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \quad , \quad \text{se } \bar{D}(p)x[n] = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f[n] = N(p)x[n] \ , \ D(p)y_h[n] = 0$$

$y_f[n]$: combinação linear dos modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)