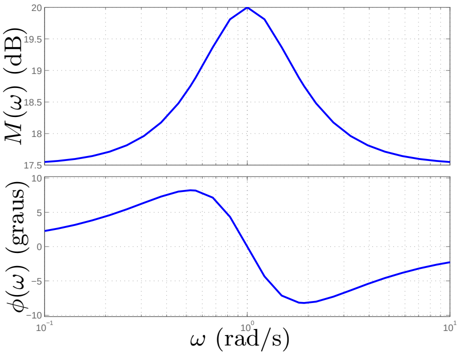
1ª Questão: Determine (com valores aproximados, obtidos do diagrama) a saída persistente (i.e., em regime permanente) para a entrada $x(t) = \operatorname{sen}(t)$ do sistema estável dado pelo diagrama de Bode (módulo em dB e fase em graus) abaixo. Obs.: $M(\omega)_{\text{dB}} = 20\log_{10} M(\omega)$



$$M(1) \approx 20 \text{ dB} = 10,\ \phi(1) \approx 0 \text{ graus},\ y_f(t) = 10\operatorname{sen}(t)$$

2ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio para $x = \sqrt{2}$ do sistema não linear

$$\dot{v} = v^2 + v - x^2, \quad v \in \mathbb{R}$$

$$(1), \quad (-2)$$

b) Determine o sistema linearizado (matriz A e vetor b) nos pontos de equilíbrio

$$A = \begin{bmatrix} 2v+1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} -2x \end{bmatrix}$$

$$x = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad b = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (1):\ A = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \quad (-2):\ A = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^3 + 15p^2 - 14p + 13)y(t) = (2p^3 + 34p^2 - 31p + 24)x(t),\ p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -13 & 14 & -15 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad d = 2$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$

b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

$$Y(s) = c(s\text{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 6 \\ -1 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3s+1}{s^2+5s+6} = \frac{8}{s+3} - \frac{5}{s+2}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(8\exp(-3t) - 5\exp(-2t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Determine uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A^{-1} = \dfrac{1}{3}A^2 + 9A + 3\text{I}$

$$A^3 + 27A^2 + 9A - 3\mathrm{I} = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & -27 \end{bmatrix}$$

$6^{\underline{a}}$ Questão: Determine a forma de Jordan da matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ que satisfaz as seguintes propriedades: i) A possui o autovalor ξ com multiplicidade algébrica igual a 5; ii) A multiplicidade geométrica do autovalor ξ é igual a 2; iii) A forma de Jordan não possui nenhum bloco de tamanho 2×2

$$J = \mathrm{diag}\big(J_1(\xi), J_4(\xi)\big)$$

$7^{\underline{a}}$ Questão: Determine a solução $v(t)$ para o sistema $\dot{v} = Av$, dados

$$v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = Pv, \quad \bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = \exp(\bar{A}t)Pv(0), \quad v = P^{-1}\bar{v} = P^{-1}\exp(\bar{A}t)Pv(0)$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-t) & t\exp(-t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-t) - t\exp(-t) \\ \exp(-t) \\ 2\exp(3t) - \exp(-t) + t\exp(-t) \end{bmatrix}$$

$8^{\underline{a}}$ Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & c \\ 2a & a + 2c \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$9^{\underline{a}}$ Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = t\cos(2t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$10^{\underline{a}}$ Questão: Determine a solução $y(t)$, $t \geq 0$, do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} -10 & -15 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix} x, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = tu(t)$$

$$H(s) = \frac{-10 - 15s}{s^2 + 3s + 2} + 7 = \frac{7s^2 + 6s + 4}{(s+1)(s+2)} \ , \quad Y(s) = H(s)\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^2} + \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+2}$$

$$y(t) = \big(2t + 5\exp(-t) - 5\exp(-2t)\big)u(t)$$