Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Determine a solução forçada do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{120}{s^2 + 16}$$

para a entrada $x(t) = \exp(2t) + \exp(-j2t)$

2ª Questão: Determine os valores de b_1 e b_2 para os quais o sistema abaixo deixa de ser controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x$$

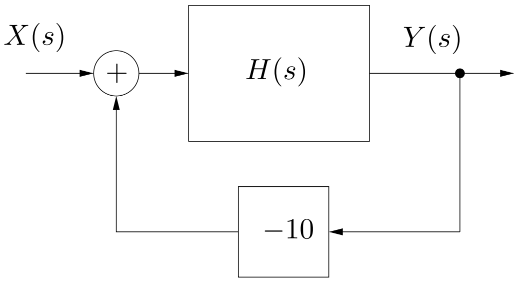
3ª Questão: Assinale "F" (falso) ou "V" (verdadeiro) para as afirmações abaixo sobre o sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \end{bmatrix} v$$

- O sistema nunca é controlável e observável
- O sistema é controlável e observável para $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$
- O sistema é controlável e observável para quaisquer α e β
- O sistema é controlável e observável para $\alpha = \beta = 1$

4ª Questão: Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro a, para $a = 2$

$$H(s) = \frac{s+4}{s^2 + 6s + 5a}$$



5ª Questão: Considere o sistema (A, b, c, d) abaixo

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

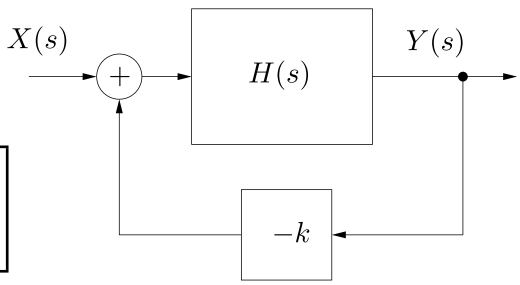
$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine os modos (autovalores) observáveis e os não observáveis

b) Determine a função de transferência

6ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 32}{s^3 + 6s^2 + 10s + 5}$$



7ª Questão: Usando como função de Lyapunov $\psi(v) = v^2/2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados no qual a função $\psi(v)$ garante a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $v = 0$ do sistema não linear dado por

$$\dot{v} = 4v^3 - a^2 v, \ a \in \mathbb{R}, \ a > 0$$

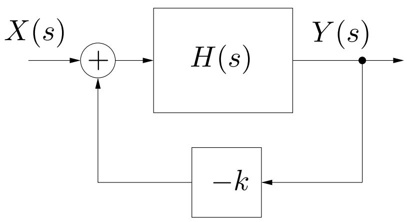
8ª Questão: Conclua (com justificativa) sobre a estabilidade assintótica do sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av$, sabendo que a equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -\mathrm{I}$$

produziu como solução única a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

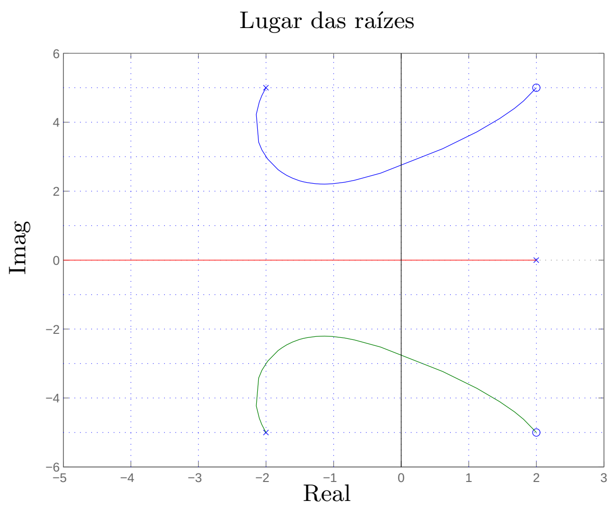
9ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com



$$H(s) = \frac{s+2}{s^4 + s^3 - 7s^2 - s + 6} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)(s-1)(s-2)}$$

Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes para o sistema realimentado (eixo real e assíntotas), determinando o ponto de encontro das assíntotas

10ª Questão: No lugar de raízes mostrado na figura, com pólos em 2, $-2 \pm 5j$ e zeros em $2 \pm 5j$, considerando que os cruzamentos com o eixo imaginário ocorrem em 0 e (aproximadamente) em $\pm 3j$, determine o intervalo para o ganho k que garante a estabilidade do sistema em malha fechada.



Lyapunov: Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \ \ , \ \ \psi(v) > 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\} \ \text{ e } \ \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): A solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$, $\forall Q = Q' > 0$, é única, simétrica e definida positiva sse todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Controlável se e somente se $\mathit{rank}\big(\mathrm{Ctrb}(A,b)\big) = n$. Observável se e somente se $\mathit{rank}\big(\mathrm{Obsv}(A,c)\big) = n$.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ \ , \ \ \mathrm{Obsv}(A,c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \ \ , \ \ \mathrm{Ctrb}(A,b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$
Se *rank* de $\mathrm{Ctrb}(A,b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\mathrm{Ctrb}(A,b)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x \ \ , \ \ y = \begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se *rank* de $\mathrm{Obsv}(A,c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\mathrm{Obsv}(A,c)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x \ \ , \ \ y = \begin{bmatrix} \bar{c}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Sensibilidade de $f(x,y)$ em relação a x: $\dfrac{x}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \ \Rightarrow \ D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \ , \ \alpha_m = 1 \ \ , \ \ N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os pólos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \to +\infty$.

3) Condição de fase: $\displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) = \pi$
sendo $\phi_r(s) = \angle(s - \lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s - \gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $\displaystyle k = \Big(\prod_{r=1}^{m} |s - \lambda_r|\Big) / \Big(\prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r|\Big)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos pólos: $\displaystyle \phi_i(s)\Big|_{s\approx\lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{m} \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\displaystyle \varphi_i(s)\Big|_{s\approx\gamma_i} = \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\dfrac{\pi(1+2r)}{m-\ell}$, $\beta_\ell > 0$, $r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\displaystyle \frac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m} \mathrm{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \mathrm{Re}(\gamma_r)\right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s) + kN(s) = 0$