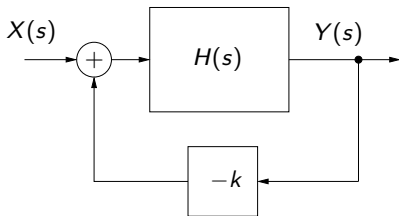


EA616 — Análise Linear de Sistemas

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2011: Aula 29 — Lugar das Raízes



$$G(s) = \frac{H(s)}{1 + kH(s)}$$

Em malha fechada, os pólos são as raízes da equação

$$1 + kH(s) = 0, \quad H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \Rightarrow \quad D(s) + kN(s) = 0$$

O posicionamento dos pólos em malha fechada em função do ganho $k \in [0, +\infty)$ é denominado lugar das raízes.

Polinômios dependendo de um parâmetro k podem ser colocados na forma

$$D(s) + kN(s)$$

e interpretados como o resultado de uma realimentação proporcional (negativa) em termos de um lugar das raízes (posicionamento das raízes de $D(s) + kN(s) = 0$ em função de $k \in [0, +\infty)$).

No Matlab, o comando `rlocus[num,den]`, com `num` contendo os coeficientes do polinômio $N(s)$ e `den` os de $D(s)$ mostra o lugar das raízes. Com o comando `grid`, são mostradas semi-circunferências (ω_n constante) e semi-retas (ξ constante) associadas a um sistema de segunda ordem.

Lugar das Raízes:

$$1 + kH(s) = 0, \quad H(s) = N(s)/D(s) \quad \Rightarrow \quad D(s) + kN(s) = 0$$

$$D(s) = \sum_{r=0}^m \alpha_r s^r, \quad \alpha_m = 1, \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

A maior parte das regras assume $\beta_{\ell} > 0$.

Regras

- 1 Simetria em relação ao eixo real.
- 2 Os pólos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \rightarrow +\infty$. O lugar das raízes vai dos pólos para os zeros (contando os zeros no infinito) quando k varia de 0 a $+\infty$.

Regras

- 3 Condição de fase

$$\sum_{r=1}^{\ell} \phi_r(s) - \sum_{r=1}^m \phi_r(s) = \pi$$

sendo $\phi_r(s) = \angle(s - \lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\phi_r(s) = \angle(s - \gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

- 4 Condição de módulo

$$k = \left(\prod_{r=1}^m |s - \lambda_r| \right) / \left(\prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r| \right)$$

- 5 Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros reais.

Regras

- 6 Ângulo de partida dos pólos

$$\phi_i(s) \Big|_{s \approx \lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^m \phi_r(s)$$

- 7 Ângulo de chegada aos zeros

$$\phi_i(s) \Big|_{s \approx \gamma_i} = \sum_{r=1}^m \phi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^{\ell} \phi_r(s)$$

Regras

- 8 O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$
- 9 Ângulos das assíntotas

$$\frac{\pi(1+2r)}{m-\ell}, \quad \beta_\ell > 0, \quad r \in \mathbb{Z}$$

- 10 Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto

$$\frac{1}{\eta} \left(\sum_{r=1}^m \operatorname{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \operatorname{Re}(\gamma_r) \right)$$

Regras

- 11 Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação

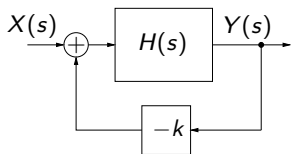
$$N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$$

- 12 Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de

$$D(s) + kN(s) = 0$$

E29 (data, RA, nome, EA616, Turma, Prof.)

Considere o sistema descrito pela função de transferência abaixo (pólos $-1 \pm j$, -1 , -2 , -3 e zeros $-1 \pm j2$ em malha aberta) realimentado por um ganho proporcional $k \in [0, +\infty)$



$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s^2 + 2s + 2)(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

- Esboce as assíntotas
- Usando as assíntotas, determine os pontos de cruzamento com o eixo imaginário e o intervalo de k que garante a estabilidade do sistema em malha fechada