EA616 — Análise Linear de Sistemas

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2011: Aula 27 — Estabilidade 2/2

Estabilidade do estado

A estabilidade do estado (ou estabilidade interna) é definida pelo comportamento das trajetórias do vetor de estados para entrada constante (em geral nula) e condições iniciais em torno do ponto de equilíbrio (estabilidade local).

Estabilidade de um ponto de equilíbrio

Um ponto de equilíbrio pode ser estável (assintoticamente ou não) ou instável.

Estabilidade de um ponto de equilíbrio

Ponto de equilíbrio estável

O ponto de equilíbrio $\bar{v}$ é estável se, para $\varepsilon > 0$, existir $\alpha(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|v(0) - \bar{v}\| < \alpha(\varepsilon) \;,\;\; \forall v(0) \quad \Rightarrow \quad \|v(t) - \bar{v}\| < \varepsilon \;,\; \forall t \geq 0$$

Ponto de equilíbrio assintoticamente estável

O ponto de equilíbrio $\bar{v}$ é assintoticamente estável se for estável e, além disso, se existir $\alpha > 0$ tal que

$$\|v(0) - \bar{v}\| < \alpha \;,\;\; \forall v(0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} v(t) = \bar{v}$$

Estabilidade assintótica de sistema linear

O sistema linear autônomo

$$\dot{v} = Av$$

é assintoticamente estável se e somente se a parte real de todos os autovalores de A for negativa

Estabilidade assintótica de sistema linear

Considere o sistema linear invariante no tempo SISO descrito por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx \quad \Rightarrow \quad H(s) = c(s\mathbf{I} - A)^{-1}b + d$$

- Todo pólo de $H(s)$ é também autovalor de A e, portanto, a estabilidade assintótica implica em BIBO estabilidade.
- Nem sempre todos os autovalores de A são pólos de $H(s)$, pois pode haver cancelamentos de zeros e pólos (não controlabilidade, não observabilidade ou ambos). Portanto, a BIBO estabilidade não necessariamente implica em estabilidade assintótica do estado.
- Para sistemas controláveis e observáveis, a BIBO estabilidade implica em estabilidade assintótica, pois todos os autovalores de A são pólos do sistema.

Lyapunov

Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \ , \ \ \psi(v) > 0 \, \forall v \in \Omega - \{0\} \ \text{e} \ \ \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \, \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Considere o sistema não-linear

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= v_2\\ \dot{v}_2 &= -v_1 + \frac{1}{3}v_1^3 - v_2\end{aligned}$$

A função de Lyapunov

$$\begin{aligned}\psi(v) = \frac{3}{4}v_1^2 - \frac{1}{12}v_1^4 + \frac{1}{2}v_1 v_2 + \frac{1}{2}v_2^2 &= \frac{1}{4}v_1^2(1 - \frac{1}{3}v_1^2) + \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}v_1 v_2 + \frac{1}{2}v_2^2\\ &= \frac{1}{4}v_1^2(1 - \frac{1}{3}v_1^2) + \begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25\\ 0.25 & 0.5\end{bmatrix}}_{>0} \begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

tem derivada temporal

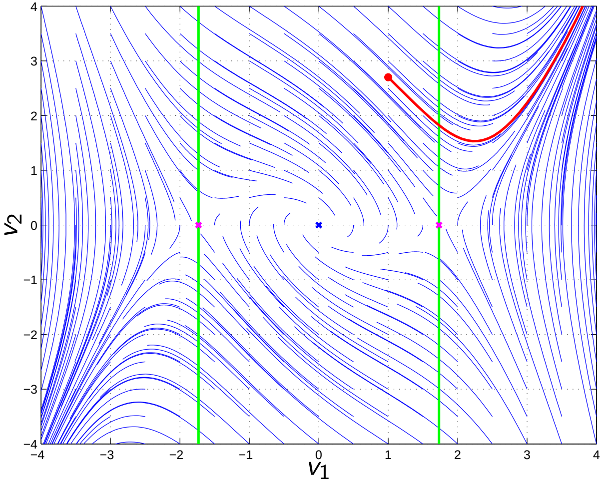
$$\dot{\psi}(v) = -\frac{1}{2}v_1^2(1 - \frac{1}{3}v_1^2) - \frac{1}{2}v_2^2$$

Pode ser verificado que $\psi(v) > 0$ e $\dot{\psi}(v) < 0$ para todo $v_2 \neq 0$ e para $v_1 \neq 0$ tal que $1 - \frac{1}{3}v_1^2 > 0$, ou seja, para v pertencente ao domínio

$$\Omega = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\sqrt{3} < v_1 < \sqrt{3} \right\} - \{0\}$$

Portanto, pela Propriedade de Lyapunov, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e existe um domínio de atração em torno de $(0, 0)$.

Note, no entanto, que Ω não é um domínio de atração. Como ilustrado no plano de fase da próxima Figura, existem trajetórias que, iniciadas dentro do domínio Ω (e, portanto, com $\dot{\psi}(v) < 0$), acabam saindo. Fora do domínio Ω, não há garantias de que a derivada da função de Lyapunov será negativa. Como conclusão, Ω não é uma estimativa do domínio de atração do ponto de equilíbrio $v = 0$.



Plano de fase para o sistema. Em traço mais grosso, uma trajetória iniciada no ponto $v(0) = [1 \;\; 2.7]'$ que sai do domínio Ω e diverge.

O comportamento local do sistema pode ser estudado em torno dos pontos de equilíbrio $(0,0)$, $(-\sqrt{3},0)$ e $(\sqrt{3},0)$, mostrados na Figura anterior. O jacobiano do sistema é dado por

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+v_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

resultando em representações linearizadas em torno dos pontos de equilíbrio dadas por

$$(0,0)\ , \qquad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} v\ , \qquad \lambda_{1,2} = -0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \text{estável}$$

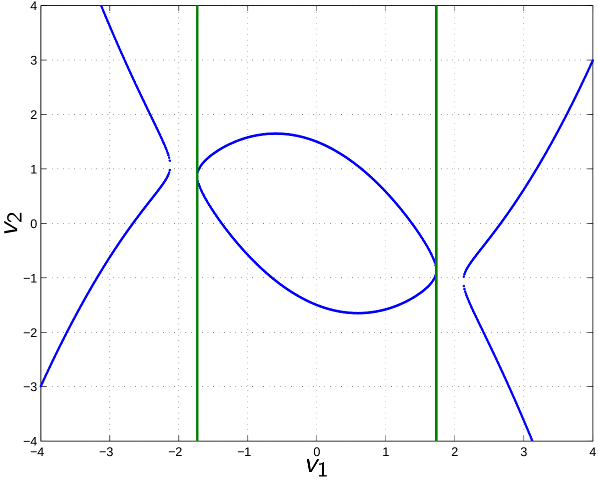
$$(-\sqrt{3},0) \text{ e } (\sqrt{3},0)\ , \qquad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} v\ , \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 \quad , \quad \text{instável}$$

Estimativas da região de atração podem ser obtidas por meio de conjuntos positivamente invariantes, como por exemplo

$$\mathscr{D} = \{v \in \mathbb{R}^n \ : \ \psi(v) \leq c\}$$

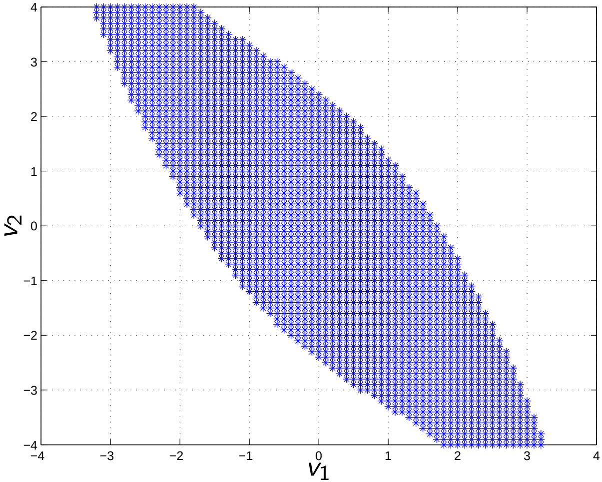
quando $\mathscr{D}$ é limitado e está contido em Ω (domínio para o qual a derivada da função de Lyapunov é negativa). Uma trajetória iniciada no instante t_0 em $\mathscr{D}$ permanece dentro do conjunto para todo $t \geq t_0$ e, como $\mathscr{D} \subset \Omega$, $\dot{\psi}(v) < 0$ garante a convergência assintótica para a origem.

Para a função de Lyapunov escolhida, pode-se procurar pelo maior valor de c tal que $\psi(v) \leq c$ dentro da região Ω, resultando em $c \approx 1.124$. O verdadeiro domínio de atração pode ser obtido por simulações exaustivas das equações diferenciais do sistema, resultando no conjunto de condições iniciais mostrado a seguir.



Regiões no plano de fase do sistema para as quais $\psi(v) = 1.124$. A estimativa da região de atração está no intervalo $-\sqrt{3} < v_1 < \sqrt{3}$.

Domínio de atração — Exemplo (cont.)



Domínio de atração para o sistema, isto é, conjunto das condições iniciais que resultam em trajetórias estáveis.

Desigualdade de Lyapunov

O sistema linear autônomo

$$\dot{v} = Av$$

é assintoticamente estável se e somente se existir $P = P' > 0$ tal que

$$A'P + PA < 0 \qquad \text{(definida negativa)}$$

Equação de Lyapunov

Para qualquer matriz $Q = Q' > 0$, a solução da equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -Q$$

é única, simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva se e somente se qualquer uma das condições for verificada.

- $v' P v > 0, \ \forall v \in \mathbb{R}^n, \ v \neq 0$;
- Todos os autovalores são positivos;
- Todos os menores principais líderes são positivos;
- Existe $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular tal que $P = R' R$.

Note que uma condição necessária para que uma matriz seja definida positiva é que todos os elementos da diagonal sejam positivos.

Uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida negativa se $-Q$ for definida positiva.

O sistema linear autônomo

$$\dot{v} = Av$$

é estável se e somente se a parte real de todos os autovalores de A for negativa ou nula, e os blocos de Jordan associados aos autovalores com parte real nula forem de ordem igual a um.

Note que, nesse caso, a trajetória $v(t)$ é sempre limitada, qualquer que seja a condição inicial $v(0)$.

E27 (data, RA, nome, EA616, Turma, Prof.)

Dado o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} v$$

determine $P = P' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que a função quadrática de Lyapunov $\psi(v) = v'Pv$ satisfaz

$$\psi(v) > 0, \dot{\psi}(v) < 0, \forall v \neq 0$$