EA616 — Análise Linear de Sistemas

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2011: Aula 25 — Controlabilidade

Tópicos

- Definição;
- Matriz de Controlabilidade $\text{Ctrb}(A, b)$;
- $A - \lambda \mathbf{I}$ e b coprimos à esquerda;
- Entrada $x(t)$ que leva de 0 a $v(\tau)$;
- Forma canônica controlável;
- Controlabilidade de sistemas similares;
- Controlabilidade e forma de Jordan;
- Dualidade;
- Decomposição canônica (modos não controláveis).

Definição

Sistemas lineares invariantes no tempo com entrada escalar, descritos por

$$\dot{v}(t) = Av(t) + bx(t) \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

são controláveis se para qualquer estado inicial $v(0)$ e um estado $v(\tau)$ final arbitrário, existir uma entrada $x(t)$, $t \in [0, \tau]$ que leve o sistema de $v(0)$ a $v(\tau)$ em tempo finito τ.

Propriedade

O sistema

$$\dot{v} = Av + bx$$

com $v \in \mathbb{R}^n$ é controlável (ou, equivalentemente, o par (A, b) é controlável) se e somente se o *rank* da matriz de controlabilidade $\text{Ctrb}(A, b)$ for igual a n

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^{n-1} b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ou seja, o sistema é controlável se e somente se $\det(\text{Ctrb}(A, b)) \neq 0$.

Propriedade

O sistema

$$\dot{v} = Av + bx$$

é controlável ou, equivalentemente, o par (A, b) é controlável, se e somente se a matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda \mathbf{I} & b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (n+1)}$$

tiver *rank* n (isto é, *rank* completo de linhas) para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Como $\det(A - \lambda \mathbf{I}) \neq 0$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ que não é autovalor de A, basta testar o *rank* da matriz para os λ's autovalores de A.

Se a matriz acima tem *rank* n, diz-se que $A - \lambda \mathbf{I}$ e b são coprimos à esquerda, isto é, que não possuem nenhum fator comum à esquerda.

Entrada $x(t)$ que leva de 0 a $v(\tau)$

Propriedade

Para sistemas controláveis, existe $\beta \in \mathbb{R}^n$ tal que a entrada

$$x(t) = b' \exp(-A't)\beta u(t) \quad , \quad t \in [0, \tau]$$

leva o sistema da condição inicial $v(0) = 0$ para $v(\tau)$ arbitrário.

Forma canônica controlável

A representação

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

é denominada de forma canônica controlável, pois $\det\big(\mathrm{Ctrb}(A,b)\big) \neq 0$ para quaisquer valores de α_k.

Controlabilidade e similaridade

Transformações de similaridade não alteram a controlabilidade de um sistema linear invariante no tempo.

Controlabilidade e Forma de Jordan

Um sistema linear invariante no tempo com uma única entrada (A, b) é controlável se e somente se sua forma de Jordan possuir apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor e todo elemento de b correspondente à última linha de cada bloco de Jordan for diferente de 0.

Dualidade

O sistema (A, b, c, d) é controlável se e somente se o sistema dual (A', c', b', d) é observável, e vice-versa, isto é, o sistema (A, b, c, d) é observável se e somente se o sistema dual (A', c', b', d) é controlável.

Considere o sistema

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

e a transformação de similaridade $\bar{v} = Pv$, com P não singular, que produz

$$\dot{\bar{v}} = P\dot{v} = \underbrace{PAP^{-1}}_{\bar{A}}\bar{v} + \underbrace{Pb}_{\bar{b}}x \quad , \quad y = \underbrace{cP^{-1}}_{\bar{c}}\bar{v} + \underbrace{d}_{\bar{d}}x$$

Se a matriz de controlabilidade do sistema

$$\mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

tem *rank* $r < n$, então

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_r & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

construída com r colunas linearmente independentes de $\mathrm{Ctrb}(A, b)$ (e demais colunas arbitrárias, para garantir a existência de P^{-1}) leva o sistema para

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d} x$$

O subsistema de ordem r

$$\dot{\bar{v}}_c = \bar{A}_c \bar{v}_c + \bar{b}_c x$$

$$y = \bar{c}_c \bar{v}_c + \bar{d} x$$

é controlável e produz a mesma função de transferência que o sistema original. Os estados associados aos modos controláveis estão no vetor $\bar{v}_c \in \mathbb{R}^r$.

Note que

$$A\begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_r & \cdots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_r & \cdots & q_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

ou seja, os vetores Aq_i, $i = 1, \ldots, r$ escrevem-se em função dos r primeiros vetores de P^{-1} (não dependem dos vetores extras $\{q_{r+1}, \ldots, q_n\}$). De maneira similar, $\bar{b}$ (representação de b na base $P^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_r & \cdots & q_n \end{bmatrix}$) não depende dos vetores extras $q_{r+1}, \ldots, q_n$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ctrb}(\bar{A}, \bar{b}) &= \begin{bmatrix} \bar{b}_c & \bar{A}_c\bar{b}_c & \cdots & \bar{A}_c^{n-1}\bar{b}_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{Ctrb}(\bar{A}_c, \bar{b}_c) & \bar{A}_c^r\bar{b}_c & \cdots & \bar{A}_c^{n-1}\bar{b}_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tem *rank* r (as colunas de $r+1$ a n são linearmente dependentes), que é o *rank* de $\mathrm{Ctrb}(\bar{A}_c, \bar{b}_c)$, indicando que o sistema de ordem r é controlável.

Como

$$(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1} = \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \bar{A}_c) & -\bar{A}_{12} \\ 0 & (s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}}) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \bar{A}_c)^{-1} & (s\mathbf{I} - \bar{A}_c)^{-1}\bar{A}_{12}(s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}})^{-1} \\ 0 & (s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}})^{-1} \end{bmatrix}$$

tem-se que a função de transferência é dada por

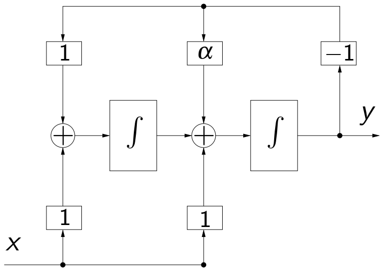
$$\begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \bar{A}_c)^{-1} & (s\mathbf{I} - \bar{A}_c)^{-1}\bar{A}_{12}(s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}})^{-1} \\ 0 & (s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{d}$$

$$= \bar{c}_c(s\mathbf{I} - \bar{A}_c)^{-1}\bar{b}_c + \bar{d}$$

A decomposição canônica que separa os modos controláveis dos não controláveis é produzida pelo comando `ctrbf` do Matlab.

E25 (data, RA, nome, EA616, Turma, Prof.)

a) Determine (A, b, c, d) da realização



b) Determine a descrição entrada-saída (isto é, $D(p)y = N(p)x$)
c) Determine α para que o sistema não seja controlável
d) Determine uma realização (A, b, c, d) que seja controlável para todo α e que produza a mesma descrição entrada-saída do item b)