EA616 — Análise Linear de Sistemas

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2011: Aula 24 — Observabilidade

Tópicos

- Definição;
- Matriz de Observabilidade Obsv(A, c);
- $A - \lambda\mathbf{I}$ e c coprimos à direita;
- Forma canônica observável;
- Observabilidade de sistemas similares;
- Observabilidade e forma de Jordan;
- Decomposição canônica (modos não observáveis).

Definição

Sistemas lineares invariantes no tempo com saída escalar, descritos por

$$\dot{v}(t) = Av(t) \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \qquad ; \qquad y(t) = cv(t) \in \mathbb{R}$$

são observáveis se existir $\tau > 0$ tal que o conhecimento da saída $y(t)$ para todo $t \in [0, \tau]$ é suficiente para determinar a condição inicial $v(0)$.

Propriedade

O sistema

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv$$

é observável (ou, equivalentemente, o par (A, c) é observável) se e somente se o *rank* da matriz de observabilidade $\text{Obsv}(A, c)$ for igual a n

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ou seja, o sistema é observável se e somente se $\det(\text{Obsv}(A, c)) \neq 0$.

c e $A-\lambda\mathbf{I}$ coprimos à direita

Propriedade

O sistema

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv$$

é observável (ou, equivalentemente, o par (A, c) é observável) se e somente se a matriz

$$\begin{bmatrix} A-\lambda\mathbf{I} \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times n}$$

tiver *rank* n (isto é, *rank* completo de colunas) para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Como $\det(A-\lambda\mathbf{I}) \neq 0$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ que não é autovalor de A, basta testar o *rank* da matriz para os λ's autovalores de A.

Se a matriz acima tem *rank* n, diz-se que $A-\lambda\mathbf{I}$ e c são coprimos à direita, isto é, que não possuem nenhum fator comum à direita.

Forma canônica observável

A representação

$$\dot{v} = Av \ , \ y = cv \quad , \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

é denominada de forma canônica observável, pois $\det\big(\mathrm{Obsv}(A, c)\big) \neq 0$ para quaisquer valores de α_k.

Observabilidade e similaridade

Transformações de similaridade não alteram a observabilidade de um sistema linear invariante no tempo.

Observabilidade e Forma de Jordan

Um sistema linear invariante no tempo com uma única saída (A, c) é observável se e somente se sua forma de Jordan possuir apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor e todo elemento de c correspondente à primeira coluna de cada bloco de Jordan for diferente de 0.

Considere o sistema

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

e a transformação de similaridade $\bar{v} = Pv$, com P não singular

$$\dot{\bar{v}} = P\dot{v} = \underbrace{PAP^{-1}}_{\bar{A}}\bar{v} + \underbrace{Pb}_{\bar{b}}x \quad , \quad y = \underbrace{cP^{-1}}_{\bar{c}}\bar{v} + \underbrace{d}_{\bar{d}}x$$

Se $rank\big(\text{Obsv}(A, c)\big) = r < n$, P não singular é dada por

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

com r linhas linearmente independentes de $\text{Obsv}(A, c)$ (e demais arbitrárias tais que P^{-1} exista), o sistema transformado (com estados associados aos modos observáveis no vetor $\bar{v}_o \in \mathbb{R}^r$) é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{c}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

O subsistema de ordem r

$$\dot{\bar{v}}_o = \bar{A}_o \bar{v}_o + \bar{b}_o x$$

$$y = \bar{c}_o \bar{v}_o + \bar{d}x$$

é observável e produz a mesma função de transferência que o sistema original.

A decomposição canônica que separa os modos observáveis dos não observáveis é produzida pelo comando `obsvf` do Matlab.

E24 (data, RA, nome, EA616, Turma, Prof.)

Determine γ para que o sistema seja observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} \gamma & 2 \end{bmatrix} v$$