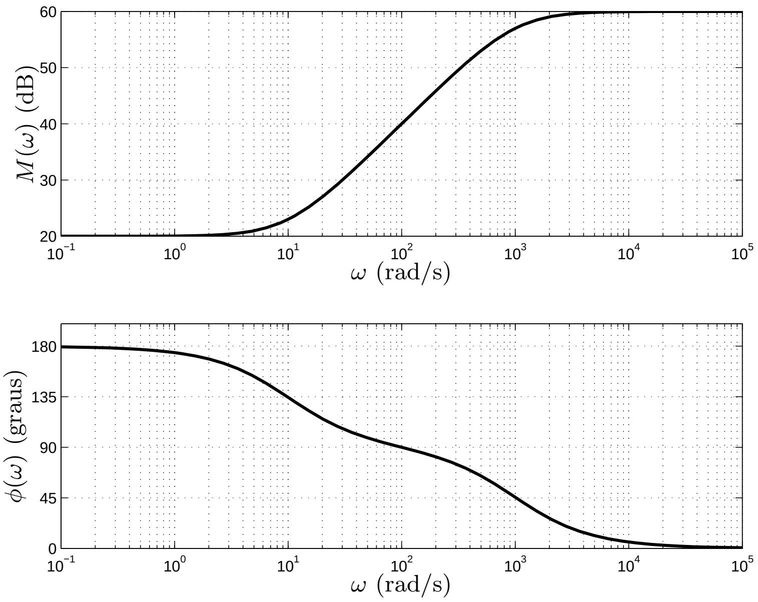
1ª Questão: Determine (com valores aproximados, obtidos do diagrama) a saída persistente (i.e., em regime permanente) para a entrada $x(t) = 10\cos^2(50t)$ do sistema estável dado pelo diagrama de Bode (módulo em dB e fase em graus) abaixo. Obs.: $M(\omega)_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10} M(\omega)$



$$x(t) = 5 + 5\cos(100t), M(0) = 20\mathrm{dB}, \phi(0) = 180^o \quad , \quad M(100) = 40\mathrm{dB}, \phi(100) = 90^o$$

$$y_f(t) = 50\cos(180^o) + 500\cos(100t + 90^o) = -50 - 500\ \mathrm{sen}(100t)$$

2ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio para $x = 1$ do sistema não linear

$$\dot{v}_1 = v_1(6 - v_1 v_2) - x^2 + 1$$
$$\dot{v}_2 = v_1 v_2^2 + v_1^2 v_2 - 10 v_1 v_2 + 9 v_1 + 4 v_2 + 5x - 5$$

$$(0,0), \quad (2,3)$$

b) Determine o sistema linearizado nos pontos de equilíbrio

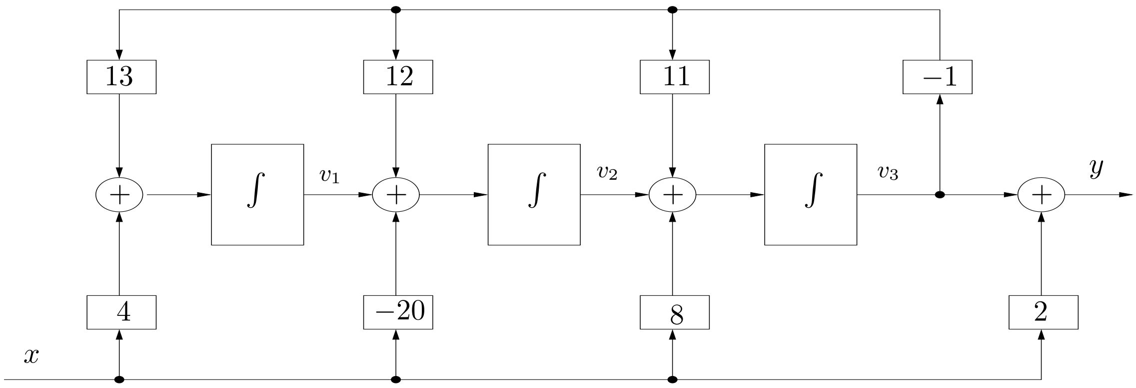
$$A = \begin{bmatrix} 6 - 2v_1v_2 & -v_1^2 \\ v_2^2 + 2v_1v_2 - 10v_2 + 9 & 2v_1v_2 + v_1^2 - 10v_1 + 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -2x \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (0,0): \ A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad , \quad (2,3): \ A = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Complete o desenho para que a realização represente o sistema descrito por

$$(p^3 + 11p^2 + 12p + 13)y(t) = (2p^3 + 30p^2 + 4p + 30)x(t), \ p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -13 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -11 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ -20 \\ 8 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, d = 2$$



4ª Questão: Considere o sistema abaixo com entrada nula ($x = 0$)

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 8 & -15 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x \ , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} v + 4x$$

a) Determine $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $v(t)$
b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $v(t)$

$$V(s) = (s\mathrm{I} - A)^{-1} v(0) = \begin{bmatrix} \dfrac{2s - 60}{s^2 - 8s + 15} \\ \dfrac{4s - 30}{s^2 - 8s + 15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{27}{s-3} - \dfrac{25}{s-5} \\ \dfrac{9}{s-3} - \dfrac{5}{s-5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \begin{bmatrix} 27\exp(3t) - 25\exp(5t) \\ 9\exp(3t) - 5\exp(5t) \end{bmatrix} u(t)$$

5ª Questão: Determine uma expressão para $M^{-0.5}$ em função de potências inteiras da matriz M

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 9 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 1,$$

$$1^{-0.5} = 1 = \rho_0 + 1\rho_1 \ , \ 9^{-0.5} = \frac{1}{3} = \rho_0 + 9\rho_1, \ \Rightarrow \ \rho_0 = \frac{13}{12}, \rho_1 = -\frac{1}{12}$$

$$M^{-0.5} = \rho_0 \mathrm{I} + \rho_1 M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

6ª Questão: Determine uma transformação Q que diagonaliza a matriz A, isto é, tal que $Q^{-1}AQ$ seja diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $y(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} v, \ y = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v \ , \ v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 20\exp(2t)\cos(t) - 10t\exp(2t)\mathrm{sen}(t)$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} , \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^3$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} a & -a-e-f & g \\ -2a & e & h \\ a & f & -g-h \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = 10t\exp(2t)\cos(3t)$.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} , \ \bar{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \ \bar{c} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ou} \ \bar{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \ \bar{c} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp(At) = \exp(2t) \begin{bmatrix} \cos(3t) & -\mathrm{sen}(3t) & t\cos(3t) & -t\mathrm{sen}(3t) \\ \mathrm{sen}(3t) & \cos(3t) & t\mathrm{sen}(3t) & t\cos(3t) \\ 0 & 0 & \cos(3t) & -\mathrm{sen}(3t) \\ 0 & 0 & \mathrm{sen}(3t) & \cos(3t) \end{bmatrix} , \ y(t) = \bar{c}\exp(At)\bar{v}(0)$$

10ª Questão: Determine a solução $y(t)$, $t \geq 0$, do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} v + 2t, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{6s}{s^2 + 5s + 6} + 2 = \frac{2s^2 + 16s + 12}{(s+2)(s+3)} \ , \quad X(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 16s + 12}{s^2(s+2)(s+3)} = \left(\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s+3} - \frac{3}{s+2}\right) \ , \ y(t) = \big(-3\exp(-2t) + 1 + 2\exp(-3t) + 2t\big)u(t)$$