Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.

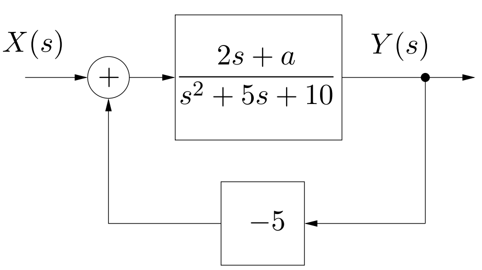
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Determine a solução forçada (regime permanente) para a entrada $x(t) = 100\cos(2t) + 100\exp(8t)$ do sistema cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{s-2}{s+2}$$

2ª Questão: Determine os valores de β para os quais o sistema abaixo não é controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2\beta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} v$$



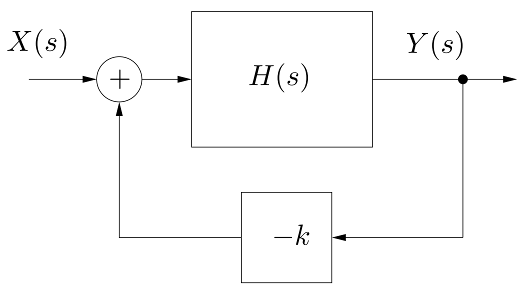
3ª Questão: Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do posicionamento do zero a, para $a = 2$.

4ª Questão: Considere um sistema linear invariante no tempo (A, b, c, d).
Assinale a(s) alternativa(s) correta(s):
- Se nenhum dos autovalores de A tiver parte real positiva, o sistema é BIBO estável
- Se todos os autovalores de A forem distintos e tiverem parte real negativa ou nula, o sistema é estável
- Se todos os autovalores de A tiverem parte real negativa e o sistema não for controlável, o sistema não é BIBO estável
- Se o sistema não é controlável e não é observável, todos pólos da função de transferência também são autovalores de A mas nem todos autovalores de A são pólos
- Se o sistema é controlável, observável e BIBO estável, então o sistema é assintoticamente estável
- Se todos os autovalores de A tiverem parte real negativa e o sistema não for observável, o sistema não é BIBO estável

5ª Questão: Sabendo que, para sistemas controláveis, existe $\beta \in \mathbb{R}^n$ tal que a entrada $x(t) = b' \exp(-At)\beta u(t)$, $t \in [0, \tau]$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, leva o sistema de $v(0) = 0$ para $v(\tau)$ arbitrário no tempo τ, determine $x(t)$ que leve de $v(0) = 0$ a $v(2) = 2$ em $\tau = 2$ segundos para $\dot{v} = 2v + 4x$.

6ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 9s + 18} \ ,$$



7ª Questão: a) Determine a matriz P solução da equação de Lyapunov associada ao sistema linear invariante no tempo (indique a matriz Q utilizada)

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} v$$

b) Determine, em função da solução encontrada, se o sistema é assintoticamente estável ou não.

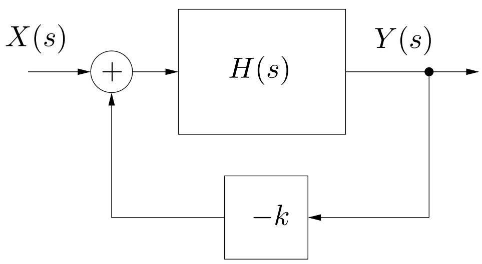
8ª Questão: Considere o sistema não-linear e a candidata à função de Lyapunov $\psi(v)$ dados por

$$\dot{v} = \frac{v^3}{\beta} - \beta v \quad , \quad \beta > 0 \quad , \quad \psi(v) = \frac{1}{4} v^4$$

Determine o domínio Ω, isto é, o conjunto no espaço de estados para o qual $\psi(v)$ garante a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$

9ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)^5}$$

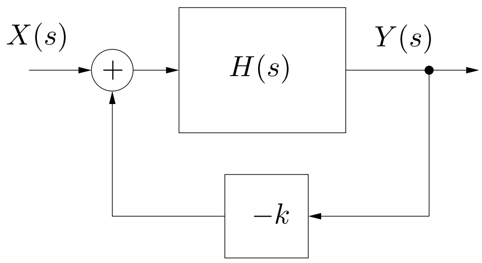


a) Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes (assíntotas e eixo real) para o sistema realimentado

b) Usando as assíntotas, determine (de maneira aproximada) os pontos de encontro do lugar das raízes com o eixo imaginário e o correspondente valor de $k > 0$

10ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2 - 4s + 8} = \frac{s+2}{(s-2+2j)(s-2-2j)}$$



a) Esboce nas folhas de papel almaço (desenhando as assíntotas e o lugar das raízes no eixo real) o lugar das raízes para o sistema realimentado

b) Determine os pontos de encontro do lugar das raízes no eixo imaginário e o correspondente valor de $k > 0$

Lyapunov: Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\} \ \text{ e } \ \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): Para qualquer matriz $Q = Q' > 0$, a solução da equação de Lyapunov $A'P+PA = -Q$ é única, simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Controlável se e somente se $rank\big(\text{Ctrb}(A,b)\big) = n$. Observável se e somente se $rank\big(\text{Obsv}(A,c)\big) = n$.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad \text{Obsv}(A,c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Ctrb}(A,b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$
Se *rank* de $\text{Ctrb}(A,b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\text{Ctrb}(A,b)$ mais vetores LI

Se *rank* de $\text{Obsv}(A,c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\text{Obsv}(A,c)$ mais vetores LI

Sensibilidade de $f(x,y)$ em relação a x: $\dfrac{x}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \ \Rightarrow \ D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \ , \ \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.
2) Os pólos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \to +\infty$.
3) Condição de fase: $\displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) = \pi$
sendo $\phi_r(s) = \angle(s-\lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s-\gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.
4) Condição de módulo: $\displaystyle k = \Big(\prod_{r=1}^{m} |s-\lambda_r|\Big)/\Big(\prod_{r=1}^{\ell} |s-\gamma_r|\Big)$
5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros reais.
6) Ângulo de partida dos pólos: $\displaystyle \phi_i(s)\Big|_{s\approx\lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{m} \phi_r(s)$
7) Ângulo de chegada aos zeros: $\displaystyle \varphi_i(s)\Big|_{s\approx\gamma_i} = \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$
8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$
9) Ângulos das assíntotas: $\dfrac{\pi(1+2r)}{m-\ell} \quad , \quad \beta_\ell > 0 \quad , \quad r \in \mathbb{Z}$
10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\displaystyle \frac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m} \text{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \text{Re}(\gamma_r)\right)$
11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$
12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s)+kN(s) = 0$