Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.

1ª Questão: Determine a solução forçada (regime permanente) para a entrada $x(t) = 5 + 8\exp(2t)$ do sistema representado pela função de transferência

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 10}{s^2 + 5s + 2}$$

2ª Questão: Um motor elétrico de corrente contínua pode ser modelado por

$$J\frac{d}{dt}\omega_m + T_c = k_f i_f i_a \quad ; \quad v_f = L_f\frac{d}{dt}i_f + R_f i_f \quad ; \quad v_{ta} = R_a i_a + L_a\frac{d}{dt}i_a + k_f i_f \omega_m$$

sendo v_f, L_f, R_f e i_f tensão, indutância, resistência e corrente de campo; v_{ta}, L_a, R_a e i_a tensão terminal, indutância, resistência e corrente de armadura; J momento de inércia, T_c torque da carga, ω_m velocidade angular do rotor e k_f constante de proporcionalidade entre o fluxo no entreferro e a corrente de campo. Para o modelo não-linear na forma de variáveis de estado (v_1, v_2, v_3), com $v_1 = i_f$, $v_2 = i_a$, $v_3 = \omega_m$, $v_{ta} = 3$ e $v_f = 1 + x$ (x é a entrada) e os parâmetros L_f, R_f, L_a, R_a, J, T_c e k_f iguais a 1:

a) Determine o ponto de equilíbrio e o modelo linearizado para $x = 0$

b) Determine os modos próprios e analise o comportamento do sistema linearizado no ponto de equilíbrio (instável, assintoticamente estável ou apenas estável).

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

3ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$(p^3 - 6p^2 - 4p - 2)y(t) = (5p^3 + 5)x(t) \quad , \quad p = d/dt$$

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine uma expressão analítica para A^{-2} como combinação linear das matrizes A^q, $q = 0, 1, 2, 3$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$5^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine a solução $y(t)$, $t \geq 0$, para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix} v \quad , \quad x(t) = 3t^2$$

$6^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine $\exp(At)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$7^{\underline{a}}$ **Questão:** Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ cuja equação característica é $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^{12}$. Sabendo que a dimensão do espaço nulo da matriz $M_1 = A - \mathrm{I}$ é igual a 5, $M_1^7 \neq 0$ e que $M_1^8 = 0$, assinale **todas as alternativas corretas**

- [ ] Há sete autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda = 1$
- [ ] A forma de Jordan da matriz A possui sete blocos.
- [ ] O maior bloco de Jordan é de ordem 8
- [ ] O menor bloco é de ordem 1
- [ ] Não há blocos de Jordan de ordem 2

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} , \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^3$$

b) Determine a matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

9ª Questão: Determine um sistema linear homogêneo, com matrizes reais, e as condições iniciais, na forma

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v} \ , \ \tilde{v}(0) = \tilde{v}_0 \ , \ y = \tilde{c}\tilde{v}$$

cuja solução seja a mesma do sistema

$$\dot{v} = v + 2x \ , \ y = 3v + 4x \ , \ v(0) = 5 \ , \ x(t) = t\exp(2t)\cos(t)$$

10ª Questão: Determine a resposta ao impulso (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x$$

Consulta

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio: $\bar{v}$ tais que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ =cte.

Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}$$

$$\text{Sistemas SISO} \ \Rightarrow \ \dot{v} = Av + bx \ , \ y = cv + dx \ , \ \frac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1}c' + d$$

$$v = T\hat{v} \ \Rightarrow \ \hat{A} = T^{-1}AT, \ \hat{b} = T^{-1}b, \hat{c} = cT \ , \ T \text{ não singular}$$

A representação entrada-saída é invariante com transformações de similaridade.

$$y(t) = c\exp(At)v_0 + c\big(\exp(At)u(t)\big) * (bx(t)) + dx(t) \ , \ Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v_0 + \big(c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b + d\big)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton:} \ \ \Delta(\lambda) = \det(s\mathrm{I} - A) = 0 \ \Rightarrow \ \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i \ , \ \Delta(\lambda) = 0 \ \Rightarrow \ f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i \ , \ f\big(\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_N)\big) = \mathrm{diag}\big(f(A_1), \ldots, f(A_N)\big)$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma \end{bmatrix} \ , \ f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

Forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\nu(M_\lambda) = n - \mathrm{rank}(M_\lambda)$ (dimensão do espaço nulo de $M_\lambda = A - \lambda\mathrm{I}$):

1) Para cada λ (multiplicidade algébrica n_λ), compute $M_\lambda = (A - \lambda\mathrm{I})$ e a dimensão r_λ do espaço nulo de M_λ. O número de blocos de Jordan associados a λ é igual a r_λ e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a n_λ. Note que r_λ é a multiplicidade geométrica de λ, ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a λ, $1 \leq r_\lambda \leq n_\lambda$.

2) A dimensão do maior bloco é igual ao menor k tal que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$ que é denominado k_λ. Note que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$ para $\forall k \geq k_\lambda$.

3) O número de blocos de dimensão i, $1 \leq i \leq k_\lambda$, é determinado a partir da dimensão do espaço nulo das matrizes M_λ^i. Assim, o número de blocos de dimensão i, $1 \leq i \leq k_\lambda$ pode ser determinado por

$$2\nu(M_\lambda^i) - \nu(M_\lambda^{i-1}) - \nu(M_\lambda^{i+1})$$

4) A forma de Jordan $\hat{A}$ é a matriz bloco diagonal composta pelos blocos de Jordan de cada autovalor.

5) A transformação de similaridade Q (não singular) que produz a forma de Jordan pode ser obtida do sistema linear de equações $AQ = Q\mathrm{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_r})$

$$\dot{v} = Av + bx \ , \ y = cv + dx, v(0) \ , \ \text{para } x \text{ solução de } x = \bar{c}\bar{v} \ , \ \dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \bar{v}(0)$$

$$\Rightarrow \ \text{Sistema autônomo aumentado:} \ \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$