1ª Questão: Determine a solução forçada (regime permanente) para a entrada $x(t) = \cos^2(t)$ do sistema descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+1}$$

Solução: $$x(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

$$y_f(t) = \frac{|H(j0)|}{2} + \frac{|H(j2)|}{2}\cos(3t + \angle H(j2)) = 2.5 + 0.539\cos(2t - 1.83)$$

2ª Questão: a) Determine os quatro pontos de equilíbrio do sistema

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_2^2 \quad , \quad \dot{v}_2 = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}v_2^2 - 1$$

b) Determine os modos próprios associados ao sistema linearizado em um dos pontos de equilíbrio

Solução: $(1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1) \quad , \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$

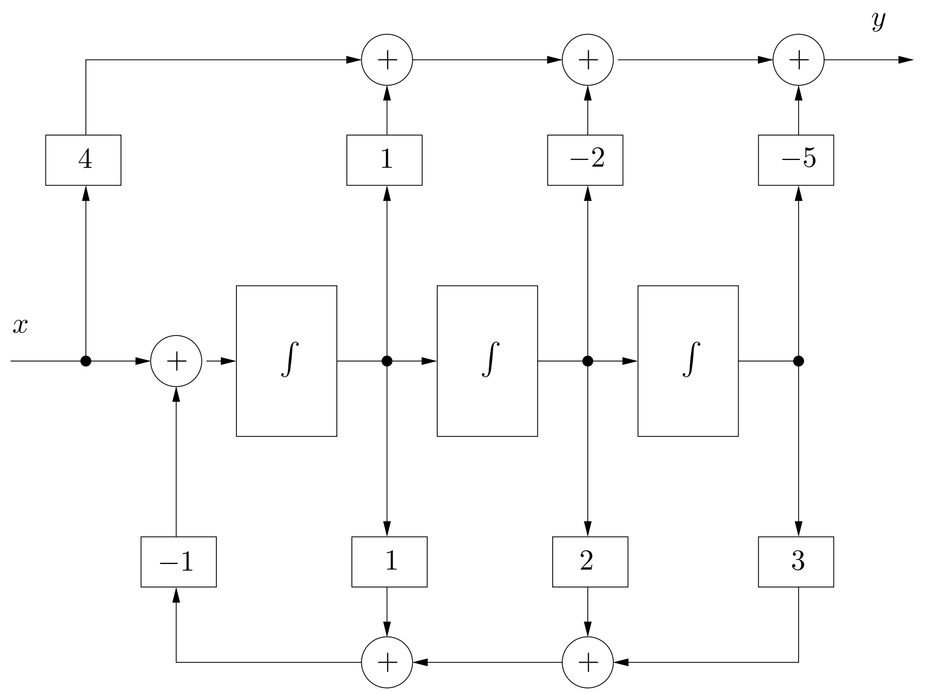
$$(1,1)\ ,\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\ ,\ \lambda_{1,2} = 1 \pm j\ ,\ \begin{matrix} \exp(t)\cos(t) \\ \exp(t)\text{sen}(t) \end{matrix}$$

$$(-1,-1)\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\ ,\ \lambda_{1,2} = -1 \pm j\ ,\ \begin{matrix} \exp(-t)\cos(t) \\ \exp(-t)\text{sen}(t) \end{matrix}$$

$$(1,-1),(-1,1)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\ ,\ \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}\ ,\ \begin{matrix} \exp(-\sqrt{2}t) \\ \exp(\sqrt{2}t) \end{matrix}$$

3ª Questão: Complete o desenho para que a realização represente $H(s) = \dfrac{4s^3+5s^2+6s+7}{s^3+s^2+2s+3}$

Solução: $\beta_3 = 4\ ,\ \bar{N}(p) = p^2 - 2p - 5\ ,\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\ ,\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ ,\ c = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}\ ,\ d = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$



$4^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine $\exp(At)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: $$\exp(At) = \exp(2t) \begin{bmatrix} 1+2t & -4t \\ t & 1-2t \end{bmatrix}$$

$5^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine $\rho_0(s)$ e $\rho_1(s)$ tais que $(s\mathrm{I} - A)^{-1} = \rho_0(s)\mathrm{I} + \rho_1(s)A \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solução:

$$\rho_0(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{2}{(s-2)^2} = \frac{s-4}{(s-2)^2} \quad , \quad \rho_1(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$6^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine $A^{\frac{1}{2}}$ sabendo que $AQ = Q\hat{A}$ com

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

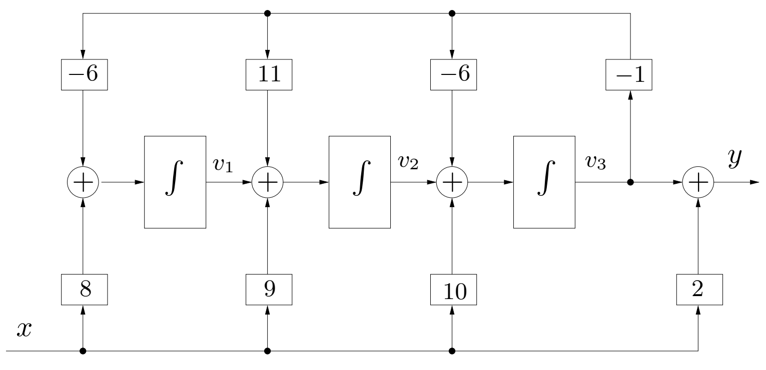
sendo a, b e c números reais positivos.

Solução:

$$A^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & \sqrt{c} - \sqrt{a} \\ 0 & \sqrt{b} & \sqrt{c} - \sqrt{b} \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix}$$

$7^{\underline{a}}$ **Questão:** a) Determine a função de transferência do sistema abaixo.



b) Sabendo que um dos autovalores é igual a 1, determine uma matriz Q que diagonaliza A, isto é, determine Q tal que $AQ = Q\hat{A}$ com $\hat{A}$ diagonal

Solução:

$$H(s) = \frac{2s^3 - 2s^2 + 31s - 4}{s^3 - 6s^2 + 11s - 6} = \frac{10s^2 + 9s + 8}{s^3 - 6s^2 + 11s - 6} + 2 \; , \; A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \; , \; Q = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8ª Questão: Determine $\hat{A}$ e Q tais que $AQ = Q\hat{A}$, com $\hat{A}$ na forma de Jordan, para

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 26 & -18 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

Solução:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \ \text{tem outras} \ldots$$

9ª Questão: Determine os blocos de Jordan da forma de Jordan de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$, autovalores $\lambda = 2$ com multiplicidade algébrica 7 e $\lambda = 3$ com multiplicidade algébrica 5. As matrizes $M_2 = A - 2\mathrm{I}$ e $M_3 = A - 3\mathrm{I}$ possuem as seguintes dimensões dos espaços nulos (denotados $\nu(\cdot)$):

$$\nu(M_2) = 4 \ , \ \nu(M_2^2) = 6 \ , \ \nu(M_2^3) = 7 \ , \ \nu(M_2^4) = 7$$

$$\nu(M_3) = 2 \ , \ \nu(M_3^2) = 3 \ , \ \nu(M_3^3) = 4 \ , \ \nu(M_3^4) = 5 \ , \ \nu(M_3^5) = 5$$

Solução:

$$\mathrm{diag}(J_1(2), J_1(2), J_2(2), J_3(2), J_1(3), J_4(3))$$

10ª Questão: Determine um sistema autônomo descrito por variáveis de estado $(\tilde{A}, \tilde{c})$ e a condição inicial $\tilde{v}(0)$ cuja saída é igual à do sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \ , \ y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} v + 5x \ , \ x(t) = 10t\exp(-2t) \ , \ v(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \tilde{c} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \tilde{v}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$