Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.

1ª Questão: Determine a solução forçada (regime permanente) para a entrada $x(t) = \cos^2(t)$ do sistema descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+1}$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

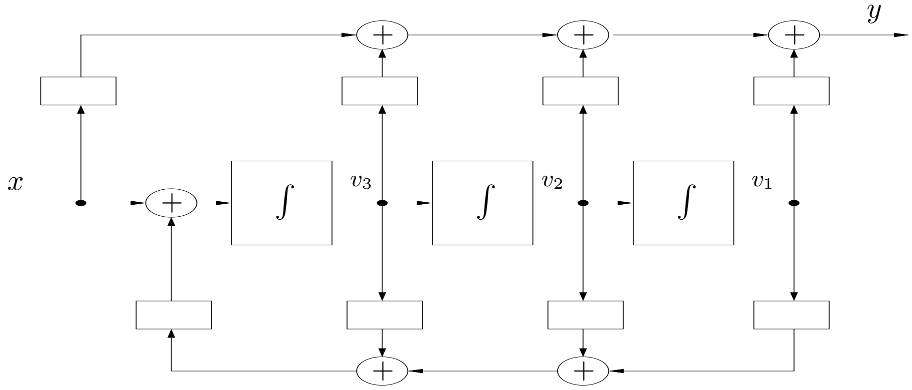
2ª Questão: a) Determine os quatro pontos de equilíbrio do sistema

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_2^2 \quad , \quad \dot{v}_2 = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}v_2^2 - 1$$

b) Determine os modos próprios associados ao sistema linearizado em um dos pontos de equilíbrio

3ª Questão: Complete o desenho para que a realização represente o sistema descrito por

$$H(s) = \frac{4s^3 + 5s^2 + 6s + 7}{s^3 + s^2 + 2s + 3}$$



4ª Questão: Determine $\exp(At)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

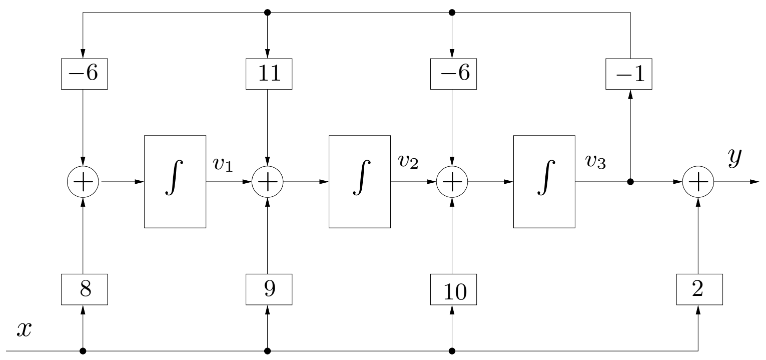
5ª Questão: Determine $\rho_0(s)$ e $\rho_1(s)$ tais que $(s\mathrm{I} - A)^{-1} = \rho_0(s)\mathrm{I} + \rho_1(s)A \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

6ª Questão: Determine $A^{\frac{1}{2}}$ sabendo que $AQ = Q\hat{A}$ com

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

sendo a, b e c números reais positivos.

7ª Questão: a) Determine a função de transferência do sistema abaixo.



b) Sabendo que um dos autovalores é igual a 1, determine uma matriz Q que diagonaliza A, isto é, determine Q tal que $AQ = Q\hat{A}$ com $\hat{A}$ diagonal

8ª Questão: Determine $\hat{A}$ e Q tais que $AQ = Q\hat{A}$, com $\hat{A}$ na forma de Jordan, para

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 26 & -18 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

9ª Questão: Determine os blocos de Jordan da forma de Jordan de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$, autovalores $\lambda = 2$ com multiplicidade algébrica 7 e $\lambda = 3$ com multiplicidade algébrica 5. As matrizes $M_2 = A - 2\mathrm{I}$ e $M_3 = A - 3\mathrm{I}$ possuem as seguintes dimensões dos espaços nulos (denotados $\nu(\cdot)$):

$$\nu(M_2) = 4 \ , \ \nu(M_2^2) = 6 \ , \ \nu(M_2^3) = 7 \ , \ \nu(M_2^4) = 7$$

$$\nu(M_3) = 2 \ , \ \nu(M_3^2) = 3 \ , \ \nu(M_3^3) = 4 \ , \ \nu(M_3^4) = 5 \ , \ \nu(M_3^5) = 5$$

10ª Questão: Determine um sistema autônomo descrito por variáveis de estado $(\tilde{A}, \tilde{c})$ e a condição inicial $\tilde{v}(0)$ cuja saída é igual à do sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \ \ , \ \ y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} v + 5x \ \ , \ \ x(t) = 10t\exp(-2t) \ \ , \ \ v(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Consulta

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio: $\bar{v}$ tais que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x} =$cte.

Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\bigg|_{\bar{v},\bar{x}}$$

$$\text{Sistemas SISO} \ \Rightarrow \ \dot{v} = Av + bx \ , \ y = cv + dx \ , \ \frac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1}c' + d$$

$$v = T\hat{v} \ \Rightarrow \ \hat{A} = T^{-1}AT, \ \hat{b} = T^{-1}b, \hat{c} = cT \ , \ T \text{ não singular}$$

A representação entrada-saída é invariante com transformações de similaridade.

$$y(t) = c\exp(At)v_0 + c\big(\exp(At)u(t)\big) * (bx(t)) + dx(t) \ , \ Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v_0 + \big(c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b + d\big)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton:} \ \ \Delta(\lambda) = \det(s\mathrm{I} - A) = 0 \ \Rightarrow \ \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i \ , \ \Delta(\lambda) = 0 \ \Rightarrow \ f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i \ , \ f\big(\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_N)\big) = \mathrm{diag}\big(f(A_1), \ldots, f(A_N)\big)$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma \end{bmatrix} \ , \ f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

Forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\nu(M_\lambda) = n - \mathrm{rank}(M_\lambda)$ (dimensão do espaço nulo de $M_\lambda = A - \lambda\mathrm{I}$):

1) Para cada λ (multiplicidade algébrica n_λ), compute $M_\lambda = (A - \lambda\mathrm{I})$ e a dimensão r_λ do espaço nulo de M_λ. O número de blocos de Jordan associados a λ é igual a r_λ e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a n_λ. Note que r_λ é a multiplicidade geométrica de λ, ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a λ, $1 \leq r_\lambda \leq n_\lambda$.

2) A dimensão do maior bloco é igual ao menor k tal que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$ que é denominado k_λ. Note que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$ para $\forall k \geq k_\lambda$.

3) O número de blocos de dimensão i, $1 \leq i \leq k_\lambda$, é determinado a partir da dimensão do espaço nulo das matrizes M_λ^i. Assim, o número de blocos de dimensão i, $1 \leq i \leq k_\lambda$ pode ser determinado por

$$2\nu(M_\lambda^i) - \nu(M_\lambda^{i-1}) - \nu(M_\lambda^{i+1})$$

4) A forma de Jordan $\hat{A}$ é a matriz bloco diagonal composta pelos blocos de Jordan de cada autovalor.

5) A transformação de similaridade Q (não singular) que produz a forma de Jordan pode ser obtida do sistema linear de equações $AQ = Q\mathrm{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_r})$

$$\dot{v} = Av + bx \ , \ y = cv + dx, v(0) \ , \ \text{para } x \text{ solução de } x = \bar{c}\bar{v} \ , \ \dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \bar{v}(0)$$

$$\Rightarrow \ \text{Sistema autônomo aumentado:} \ \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$