1ª Questão: Determine $y(t)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 5)^2 + 2^2$$

$$v(t) = \exp(At)v(0), \quad \exp(At) = \exp(5t) \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\text{sen}(2t) \\ \text{sen}(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad y = c\exp(At)v(0)$$

$$y(t) = \exp(5t)\big(3\cos(2t) - \text{sen}(2t)\big)$$

2ª Questão: Determine as matrizes J (forma de Jordan) e Q tais que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo) que produza a função $y(t) = 3t^2 + 2t + 1$ como saída da equação de estados dada por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}\ ,\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0\ ,\ y = \bar{c}\bar{v}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Usando Cayley-Hamilton, construa uma matriz real $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que satisfaça a equação

$$A - 8I = 5A^{-2} - 3A^{-1}$$

$$A^3 - 8A^2 + 3A - 5I = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

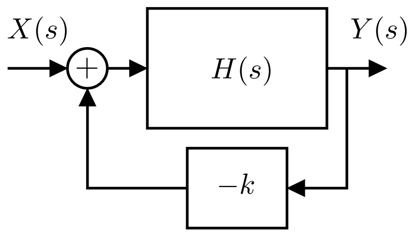
5ª Questão: Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \beta \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha + \beta \\ 2\alpha + 2\beta + 3 & 1 & 3\alpha + \beta(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Obsv}(A, c)) = 2\alpha\beta - 6\alpha + 2\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0,\ \beta = 3 - \alpha$$

6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 9s + 8}$$

$$D(s) = s^3 + ks^2 + (9-k)s + 8 \ \ , \quad 1 < k < 8$$

7ª Questão: Considerando a desigualdade de Lyapunov, determine os intervalos de α e β reais que garantem a estabilidade assintótica do sistema linear para o qual obteve-se uma matriz P simétrica definida positiva que produz (A' indica o transposto de A)

$$-Q = A'P + PA = \begin{bmatrix} -8 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\beta-5) \end{bmatrix}$$

A desigualdade de Lyapunov impõe $Q > 0$, ou seja os menores principais líderes da matriz Q devem ser positivos. Assim,

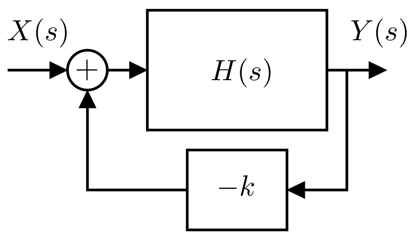
$$8 - 4\alpha^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}, \qquad \beta > 5$$

8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ Assintoticamente estável (autovalores com parte real negativa)

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ Instável (parte real nula em blocos de Jordan de tamanho dois)

9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para



$$H(s) = \frac{(s-1)^2(s+4)}{(s-5)(s-3+2j)(s-3-2j)s(s+2+3j)(s+2-3j)}$$

Eixo real: $(-\infty, -4], [0, 5]$, Número: $\eta = 6 - 3 = 3$

Ângulos: $\pm\frac{\pi}{3}, \pi$, Encontro: $\frac{1}{3}(5+3+3+0-2-2-(1+1-4)) = \frac{9}{3} = 3$

10ª Questão: No lugar das raízes da figura (quatro polos em -2) determine o valor de k nos cruzamentos com a linha vertical que passa pelo -3.

$$k = |(-3+j) - (-2)|^4 = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$$