1ª Questão: Determine $y(t)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

$$v(t) = \exp(At)v(0), \quad \exp(At) = \exp(2t) \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = c\exp(At)v(0), \quad y(t) = (1+2t)\exp(2t)$$

2ª Questão: Determine as matrizes J (forma de Jordan) e Q tais que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda + 2)^2$$

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} a & c \\ -2a & a - 2c \end{bmatrix}, \quad a \neq 0$$

3ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo) que produza como saída da equação de estados a função $y(t) = (20 - 10t + 2t^2)\exp(t)$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Usando Cayley-Hamilton, construa uma matriz real $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que satisfaça a equação

$$2A^{-1} = 2A^2 - 3A + 9I, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

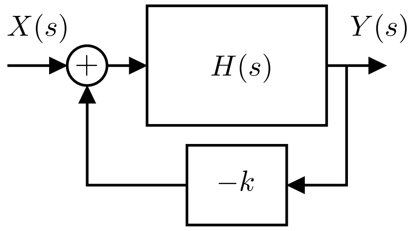
$$A^3 - \frac{3}{2}A^2 + \frac{9}{2}A - I = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -9/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

5ª Questão: Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$\mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \alpha^2\beta \\ 0 & \beta & \alpha\beta - 2\beta \\ 1 & 1 & \beta + 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathrm{Ctrb}(A, b)) = 3\beta^2 - 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (3 - 3\alpha + \beta)\beta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0, \ \beta = 3\alpha - 3$$



6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 9s^2 + 4s + 2}$$

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 9s^2 + 4s + 2 + k \quad , \quad -2 < k < 12$$

7ª Questão: Considerando a desigualdade de Lyapunov, determine os intervalos de α e β reais que garantem a estabilidade assintótica do sistema linear para o qual obteve-se uma matriz P simétrica definida positiva que produz (A' indica o transposto de A)

$$-Q = A'P + PA = \begin{bmatrix} -1 & 2\alpha & -\beta \\ 2\alpha & -5 & 0 \\ -\beta & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

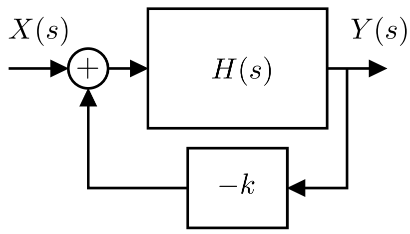
A desigualdade de Lyapunov impõe $Q > 0$, ou seja os menores principais líderes da matriz Q devem ser positivos. Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\alpha & \beta \\ -2\alpha & 5 & 0 \\ \beta & 0 & 4 \end{bmatrix} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 > 0, \quad -\frac{\sqrt{5}}{2} < \alpha < \frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad -\sqrt{4 - (16/5)\alpha^2} < \beta < \sqrt{4 - (16/5)\alpha^2}$$

8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ Estável (autovalores com parte real nula em blocos modais de Jordan de tamanho mínimo)

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ Instável (parte real nula em blocos de Jordan de tamanho dois)



9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para

$$H(s) = \frac{(s+10)(s+1)(s-8)}{(s+3)^2 s^2 (s-1)^2 (s-3+j)(s-3-j)(s-4)}$$

Eixo real: $[-10, -1], [4, 8]$, Número: $\eta = 9 - 3 = 6$

Ângulos: $\pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{6}$, Encontro: $\frac{1}{6}(-3 - 3 + 1 + 1 + 4 + 3 + 3 - (-10 - 1 + 8)) = \frac{9}{6} = 1.5$

10ª Questão: Determine o valor de k no ponto 0 da figura ao lado considerando a realimentação mostrada na **9ª Questão** com

$$H(s) = \frac{1}{(s + 4 - 3j)(s + 4 + 3j)(s - 1)}$$

$$k = |0 - (-4+3j)||0 - (-4-4j)||0 - 1| = \sqrt{25}\sqrt{25} = 25$$