

Nome:

RA:

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: Determine $y(t)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v, \quad y = [2 \quad -1] v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

2ª Questão: Determine as matrizes J (forma de Jordan) e Q tais que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda + 2)^2$$

| | |
|----|--|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |

3ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo) que produza como saída da equação de estados a função $y(t) = (20 - 10t + 2t^2) \exp(t)$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0) = \bar{v}_0, \quad y = \bar{c}\bar{v}$$

4ª Questão: Usando Cayley-Hamilton, construa uma matriz real $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que satisfaça a equação

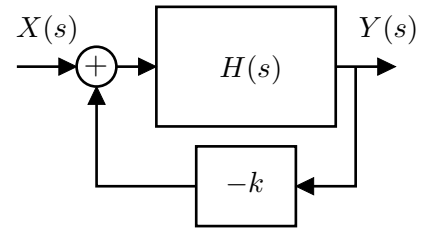
$$2A^{-1} = 2A^2 - 3A + 9I, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5ª Questão: Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 9s^2 + 4s + 2}$$



7ª Questão: Considerando a desigualdade de Lyapunov, determine os intervalos de α e β reais que garantem a estabilidade assintótica do sistema linear para o qual obteve-se uma matriz P simétrica definida positiva que produz (A' indica o transposto de A)

$$-Q = A'P + PA = \begin{bmatrix} -1 & 2\alpha & -\beta \\ 2\alpha & -5 & 0 \\ -\beta & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

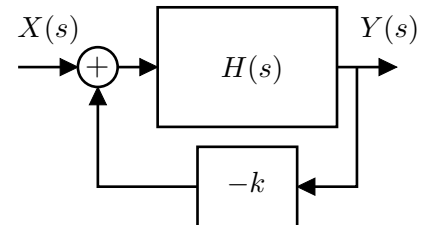
8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

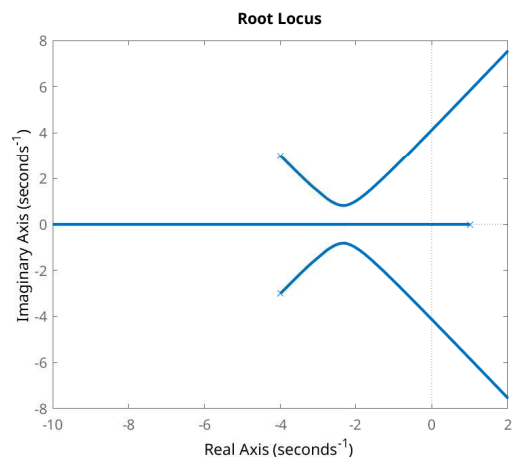
9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para

$$H(s) = \frac{(s + 10)(s + 1)(s - 8)}{(s + 3)^2 s^2 (s - 1)^2 (s - 3 + j)(s - 3 - j)(s - 4)}$$



10ª Questão: Determine o valor de k no ponto 0 da figura ao lado considerando a realimentação mostrada na **9ª Questão** com

$$H(s) = \frac{1}{(s + 4 - 3j)(s + 4 + 3j)(s - 1)}$$



Solução da equação de estado

$$y(t) = c \exp(At)v_0 + c(\exp(At)u(t)) * (bx(t)) + dx(t), \quad Y(s) = c(sI - A)^{-1}v_0 + (c(sI - A)^{-1}b + d)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton: } \Delta(\lambda) = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i, \quad \Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i, \quad f(\text{diag}(A_1, \dots, A_N)) = \text{diag}(f(A_1), \dots, f(A_N))$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma \end{bmatrix}, \quad f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

$$\text{Forma modal: } M = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - \sigma)^2 + \omega^2, \quad \exp(Mt) = \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$\text{Forma modal de Jordan: } \begin{bmatrix} M & I & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{bmatrix}, \quad \exp\left(\begin{bmatrix} M & I \\ 0 & M \end{bmatrix} t\right) = t \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\nu(M_\lambda) = n - \text{rank}(M_\lambda)$ (dimensão do espaço nulo de $M_\lambda = A - \lambda I$ = número de blocos de Jordan associados a λ = multiplicidade geométrica do autovalor λ): $AQ = QJ$, $J = Q^{-1}AQ$, Q formada por autovetores linearmente independentes e autovetores generalizados.

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx, \quad v(0) \quad , \quad \text{para } x \text{ solução de } x = \bar{c}\bar{v}, \quad \dot{v} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0)$$

$$\Rightarrow \text{ Sistema autônomo aumentado: } \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega) \quad \text{sendo } \log \text{ o logaritmo na base } 10$$

Controlabilidade e Observabilidade: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Controlável se e somente se:

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}\right) = n, \quad \text{ou } \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & b \end{bmatrix}\right) = n, \quad \forall \lambda \text{ autovalor}$$

Observável se e somente se:

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n, \quad \text{ou } \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ c \end{bmatrix}\right) = n, \quad \forall \lambda \text{ autovalor}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$

Se rank de $\text{Ctrb}(A, b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\text{Ctrb}(A, b)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se rank de $\text{Obsv}(A, c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\text{Obsv}(A, c)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} \bar{c}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Estabilidade por Lyapunov: Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\} \quad \text{e} \quad \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): A solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$, $\forall Q = Q' > 0$, é única, simétrica e definida positiva SSE todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa (\equiv assintoticamente estável)

Introdução à realimentação: Sensibilidade de $f(x, y)$ em relação a x : $\frac{x}{f} \frac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \Rightarrow D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^m \alpha_r s^r \quad , \quad \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os polos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \rightarrow +\infty$.

3) Condição de fase: $\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^m \phi_r(s) = \pi$

sendo $\phi_r(s) = \angle(s - \lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s - \gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $k = \left(\prod_{r=1}^m |s - \lambda_r| \right) / \left(\prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r| \right)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de polos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos polos: $\phi_i(s) \Big|_{s \approx \lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^m \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\varphi_i(s) \Big|_{s \approx \gamma_i} = \sum_{r=1}^m \phi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\frac{\pi(1 + 2r)}{m - \ell}$, $\beta_\ell > 0$, $r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\frac{1}{\eta} \left(\sum_{r=1}^m \text{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \text{Re}(\gamma_r) \right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s) + kN(s) = 0$