1ª Questão: Determine: a) A função de transferência do sistema

$$y[n+2] + 9y[n] = 2x[n+2]$$

b) A solução forçada para a entrada $x[n] = (-j)^n$

$$H(z) = \frac{2z^2}{z^2+9}, \quad y_f[n] = H(-j)(-j)^n = -\frac{1}{4}(-j)^n$$

2ª Questão: Determine a transformada Z e o domínio de existência Ω_x para a sequência

$$x[n] = 4n(1/2)^n u[-n]$$

$$y[n] = x[-n] = -4n(2)^n u[n] \quad \Rightarrow \quad Y(z) = -8\frac{z}{(z-2)^2}, \quad |z| > 2$$

$$\Rightarrow X(z) = Y(z^{-1}) = -8\frac{z^{-1}}{(z^{-1}-2)^2} = \frac{-2z}{(z-1/2)^2}, \quad |z^{-1}| > 2 \quad \Rightarrow \quad |z| < 1/2$$

3ª Questão: Determine, para a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{9z^4 - z^3 + 5z^2 - 5z}{3z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z - 1} = \frac{9z^4 - z^3 + 5z^2 - 5z}{(3z+1)(z^2+1)(z-1)}, \quad |z| > 1$$

a) $x[0] = 3$ b) $x[1] = \dfrac{5}{3}$ c) $x[+\infty] = \nexists$

4ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta é

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{4z}{(z-3)^2} \quad , \quad |z| < 3$$

a) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\} = \left(\dfrac{d}{dz}\right) \dfrac{4z}{(z-3)^2}\Big|_{z=0} = \dfrac{4}{9}$

b) A média $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \displaystyle\sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \left(z\dfrac{d}{dz}\right) \dfrac{4z}{(z-3)^2}\Big|_{z=1} = 2$

5ª Questão: a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] - y[n+1] - 6y[n] = 29x[n+1] - 12x[n]$$

b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

$$(p^2 - p - 6)y[n] = (29p - 12)x[n], \quad H(z) = \frac{N(p)}{D(p)}\Big|_{p=z} = \frac{29z-12}{z^2-z-6} = \frac{29z-12}{(z+2)(z-3)}$$

$$H(z) = 2 - \frac{7z}{z+2} + \frac{5z}{z-3}, \quad h[n] = 2\delta[n] - 7(-2)^n u[n] + 5(3)^n u[n]$$

Alternativamente,

$$\frac{29z-12}{(z+2)(z-3)} = z^{-1}\underbrace{\left(\frac{14z}{z+2}\right)}_{14(-2)^n u[n]} + z^{-1}\underbrace{\left(\frac{15z}{z-3}\right)}_{15(-3)^n u[n]} \quad \Rightarrow \quad h[n] = (14(-2)^{n-1} + 15(-5)^{n-1})u[n-1]$$

6ª Questão: a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+1] + 4y[n] = 2, \quad y[0] = -3$$

b) Determine $y[n]$

$$Y(z) = \frac{-3z}{z+4} + 2\frac{z}{(z-1)(z+4)} = \frac{-3z^2+5z}{(z-1)(z+4)} = \frac{(2/5)z}{z-1} - \frac{(17/5)z}{z+4}, \quad y[n] = (2/5 - (17/5)(-4)^n)u[n]$$

7ª Questão: a) Determine a solução forçada de

$$y[n+2] + 2y[n+1] + y[n] = (p^2+2p+1)y[n] = (p+1)^2 y[n] = -4(-1)^n$$

b) Determine a solução para $y[0] = 5$, $y[1] = 0$

$$y_f[n] = -2n^2(-1)^n, \quad y[n] = 5(-1)^n - 3n(-1)^n - 2n^2(-1)^n$$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = n^3(-1)^n - 5(-1)^n$$

$$\bar{D}(p) = (p+1)^4, \quad (p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1)y[n] = 0, \ y[0] = -5, y[1] = 4, y[2] = 3, y[3] = -22$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\,(v_2+2)(v_1-4) - 8x \\ \dot{v}_2 &= -\,v_1(v_1+1)(v_2-1) + x \end{aligned}$$

$$(0,-2), \quad (-1,-2), \quad (4,1)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -v_2 - 2 & -v_1 + 4 \\ -(v_1+1)(v_2-1) - v_1(v_2-1) & -v_1(v_1+1) \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$(-1,-2): \ \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ indeterminado, autovalores puramente imaginários}$$

$$(0,-2): \ \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ instável, um autovalor com parte real positiva}$$

$$(4,1): \ \dot{v} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ assint. estável, autovalores com parte real negativa}$$

10ª Questão: Complete os valores para que a realização (A, b, c, d) represente o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^4 + 3p^3 - 4p^2 + 6p + 5)y(t) = (3p^4 + 12p^3 - 17p^2 + 11p + 24)x(t), \ p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} \\ 1 & 0 & 0 & \boxed{-6} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-3} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \boxed{9} \\ \boxed{-7} \\ \boxed{-5} \\ \boxed{3} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \boxed{3}$$