

Nome: .....

RA: .....

**Obs.:** Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

**1ª Questão:** Determine a solução forçada  $y_f(t)$  para a entrada  $x(t) = \exp(t) + 5$  do sistema linear invariante no tempo cuja equação diferencial é dada por

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = x$$

**2ª Questão:** Determine o sinal  $x(t)$  cuja transformada de Laplace (bilateral) e domínio de existência  $\Omega_x$  são dados por

$$X(s) = \frac{-2}{(s+2)^5}, \quad \text{Re}(s) < -2$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

**3ª Questão:** Determine  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$  (transformada de Laplace bilateral inversa) para

$$X(s) = \frac{6s^2 - 6s - 27}{(s+1)^2(s-3)}, \quad -1 < \text{Re}(s) < 3$$

**4ª Questão:** a) Determine a transformada unilateral de Laplace  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ , sendo  $y(t)$  a solução da equação diferencial abaixo

$$\dot{y} + 2y = 12 \exp(-2t) \cos(3t)u(t), \quad y(0) \text{ dado}$$

b) Determine a solução para  $y(0) = 10$



**5ª Questão:** Determine a resposta à rampa  $y_r(t)$  (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 6x$$

**6ª Questão:** Determine, para o sinal causal  $y(t)$  cuja transformada de Laplace é dada abaixo

$$Y(s) = \frac{(3s + 2)(5s + 3)(3s - 5)}{s(s^2 + 2s + 5)(s + 1)}, \quad \text{Re}(s) > -1$$

a) O valor final  $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$       b) O valor inicial  $y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$



**7ª Questão:** a) Determine a solução forçada  $y_f(t)$  da equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 2 \exp(-2t)$$

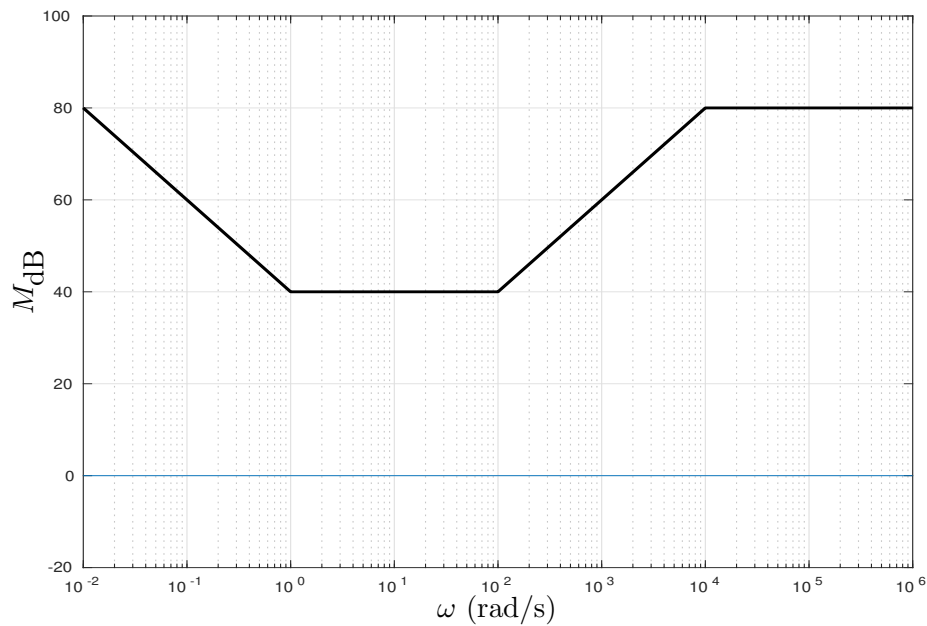
b) Determine a solução para  $y(0) = 4, \dot{y}(0) = -3$



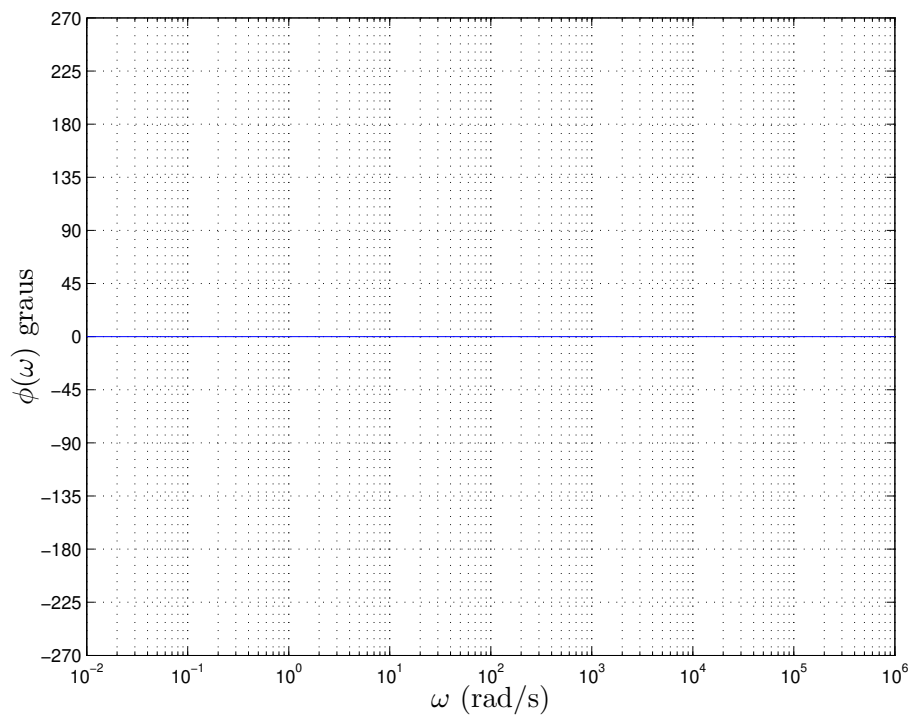
**8ª Questão:** Determine a equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a solução

$$y(t) = 10t^2 - \exp(-3t)(2 \cos(2t) - 5 \sin(2t))$$

9ª Questão: Considere as assíntotas de módulo do diagrama de Bode em escala logarítmica da função de transferência de um sistema linear invariante no tempo de fase mínima da figura abaixo.



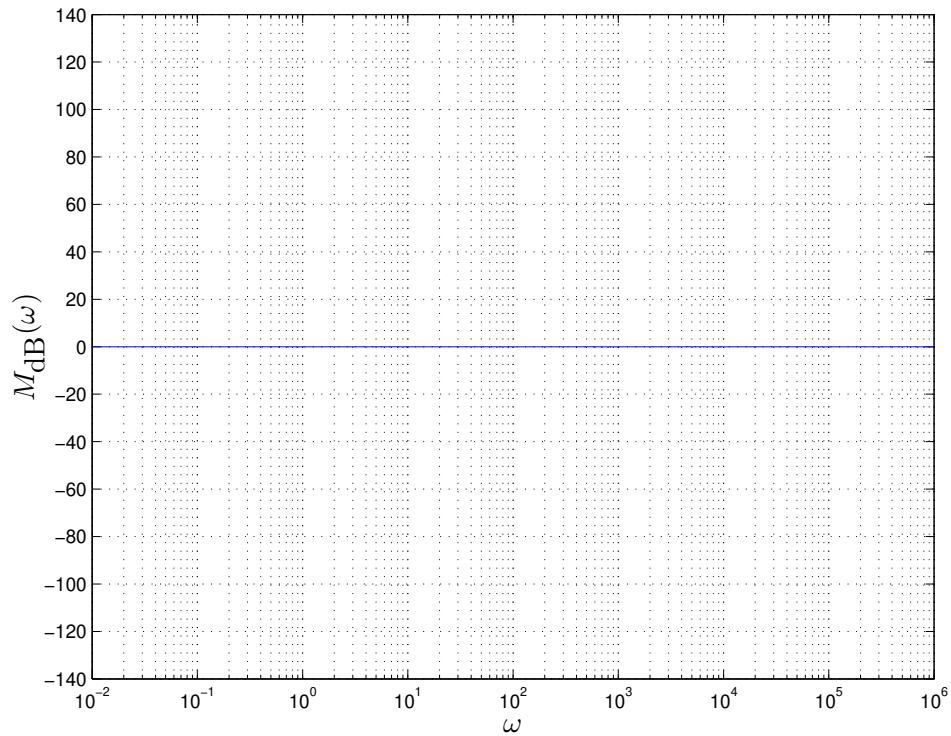
a) Esboce as assíntotas de fase (em graus)



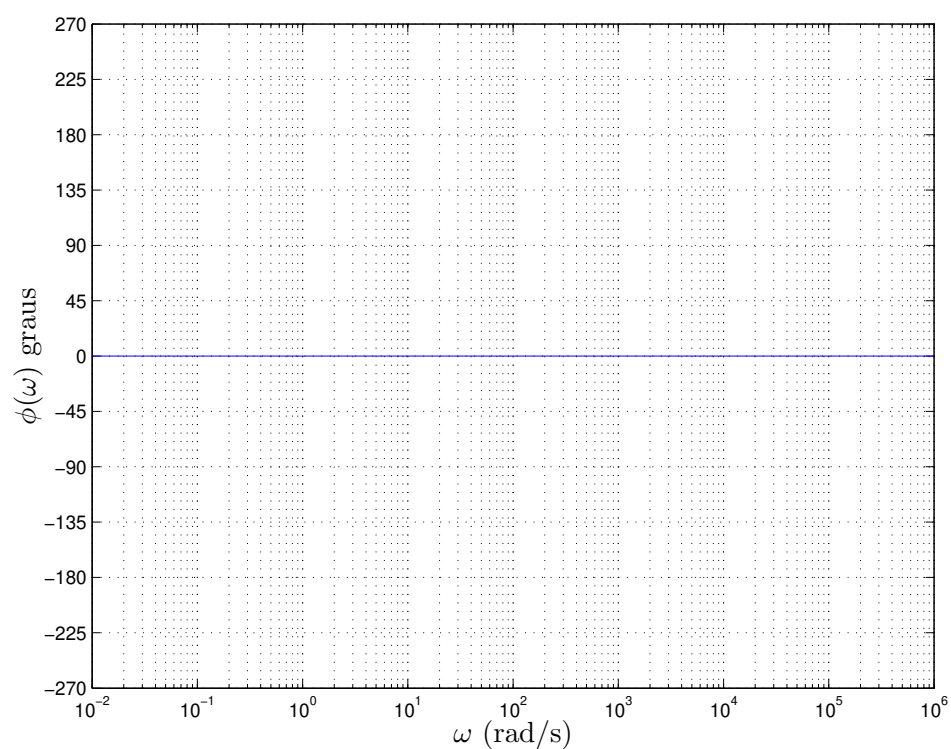
b) Baseando-se nos diagramas assintóticos de módulo e fase, determine a solução forçada do sistema para a entrada  $x(t) = 100 \cos(10t) + \sin(10000t)$

**10ª Questão:** a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{10^6}{(s + 1)(s + 100)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



$$u(t) \text{ (função degrau)}, \quad \delta(t) \text{ (função impulso)}, \quad \delta(t) = \frac{d}{dt}u(t), \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\beta)d\beta$$

$$G_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2), \quad \text{Tri}_{2T}(t) = (t/T + 1)G_T(t + T/2) + (-t/T + 1)G_T(t - T/2)$$

Sistema linear invariante no tempo: Autofunção  $x(t) = \exp(st) \Rightarrow y_f(t) = H(s) \exp(st)$

$$h(t) \text{ real: } x(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

$$x(t) = \sin(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega))$$

**Transformada de Laplace (bilateral):**

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-st) dt, \quad s \in \Omega_h, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = X(s) \Big|_{s=0}, \quad 0 \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}\{x(t) = x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\} \mathcal{L}\{x_2(t)\}, \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = x(t - \tau)\} = X(s) \exp(-s\tau), \quad \Omega_y = \Omega_x, \quad \mathcal{L}\{\exp(-at)u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s), \quad -s \in \Omega_x, \quad \mathcal{L}\{-\exp(-at)u(-t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}(s+a) < 0$$

$$\mathcal{L}\{\exp(-\alpha t) \cos(\beta t) u(t)\} = \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}, \quad \mathcal{L}\{\exp(-\alpha t) \sin(\beta t) u(t)\} = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}, \quad \text{Re}(s+\alpha) > 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} \exp(-at) u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}, \quad \text{Re}(s+a) > 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\left\{y(t) = \int_{-\infty}^t x(\beta) u(\beta) d\beta\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad \Omega_y \supset \Omega_x \cap \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} u(t)\right\} = \frac{1}{s^{m+1}}, \quad \text{Re}(s) > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\{y(t) = \exp(-at)x(t)\} = X(s+a); \quad \Omega_y = (s+a) \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = t^m x(t)\} = (-1)^m \frac{d^m X(s)}{ds^m}, \quad \Omega_y = \Omega_x, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s), \quad \Omega_{\dot{x}} \supset \Omega_x$$

**Transformada de Laplace (unilateral):**

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-st) dt, \quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0), \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0), \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m \mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} x^{(k)}(0)$$

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

**Coefficientes a determinar (equações diferenciais):**  $py(t) \triangleq \frac{d}{dt}y(t)$

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^m a_k f_k(t), \quad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se  $\lambda$  é raiz de multiplicidade  $r$  de  $D(\lambda)$ , então  $\exp(\lambda t)$ ,  $t \exp(\lambda t)$ ,  $\dots$ ,  $t^{r-1} \exp(\lambda t)$  são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad \text{se } \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada: } y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \quad , \quad D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^m b_k g_k(t), \quad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

**Resposta em Frequência:**  $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-st) dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a frequência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega) \quad (\text{sendo } \log \text{ o logaritmo na base } 10)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

$\omega_c$  (frequência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta frequência

Polos complexos:  $0 < \xi < 1$ ,  $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$