Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC)

Guia de Estudos

Análise Linear de Sistemas - EA616

Prof.: Pedro Luis Dias Peres

PAD: Álvaro Tona Ribas Cruz

1ª edição — 2024

Introdução

Este guia de estudos foi escrito para a disciplina de Análise Linear de Sistemas (EA616), ministrada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas (FEEC/Unicamp) pelo Prof. Dr. Pedro L. D. Peres, durante o 1º semestre de 2024.

As seções foram divididas em: (i) resumo teórico, (ii) exercícios propostos e (iii) algoritmos de resolução. O objetivo é fornecer ao aluno o conteúdo apresentado em sala de aula de forma resumida, bem como um passo a passo prático de como resolver os exercícios propostos pelo professor, com foco nas questões mais frequentes em provas antigas. Para tanto, todas as seções têm como base as listas de exercícios propostas durante o período de oferecimento emergencial (MOE, 1s2020 – 2s2021) e as provas dos últimos dois anos (PR, PC, 1s2022– 2s2023), as quais podem ser consultadas no site da disciplina.

As soluções e algoritmos mostrados podem não ser as únicas formas de resolver um exercício, então soluções próprias são encorajadas e não devem ser necessariamente descartadas. As resoluções foram escolhidas por serem mais simples ou diretas, minimizando as manipulações mais difíceis ou conceitos mais abstratos.

Este material é de autoria do PAD e não passou por um processo de revisão por terceiros, podendo conter erros. Em caso de dúvidas, consulte o material original e/ou envie as dúvidas por e-mail, em a239520@dac.unicamp.br, ou diretamente com o professor.

Conteúdo

1 Transformada de Laplace

1.1 Resumo teórico

Ao tentar resolver um problema analiticamente, um dos aspectos mais importantes a se considerar é o *domínio* no qual o problema é resolvido. Sua escolha pode facilitar ou dificultar – até mesmo impossibilitar – a resolução do problema. Portanto, é interessante desenvolver ferramentas que permitam construir equivalências entre diferentes domínios.

Em matemática, isto é feito através de *transformadas*, que correspondem a uma operação que age sobre uma função $f(\cdot)$, em um determinado domínio Ω_1, e encontra o equivalente desta em outro domínio Ω_2. Por exemplo, a transformada de Fourier $\mathcal{F}\{f(\cdot)\}$ corresponde à mudança do domínio do tempo para o da frequência (complexa).

A transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(\cdot)\}$ é uma generalização da transformada de Fourier. Nela, ocorre a mudança do domínio real t para o domínio complexo s, através da operação

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-st)\, dt \tag{1.1}$$

onde $s \in \mathbb{C}$ pertence ao domínio Ω_x, que corresponde aos valores de s para os quais a integral (1.1) é finita. Note que a transformada deve obedecer à condição de existência.[3]

Teorema 1 *Seja $f(t)$ uma função contínua por partes em todo intervalo $t \geq 0$ que satisfaça $|f(t)| \leq A\exp(\alpha t)$ para constantes A, α. Então, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > \alpha$, $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = 0$.*

O uso prático desta transformada é diverso, mas é particularmente importante em problemas cuja solução no domínio complexo é mais simples, como, por exemplo, encontrar a função de transferência de um circuito em engenharia ou a função de partição em física estatística.

Há várias propriedades que decorrem da transformada de Laplace, conforme listadas abaixo.

Propriedade 1: A área sob a curva de uma função $x(t)$, para $s = 0 \in \Omega_x$ é

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = X(s)\Big|_{s=0} \tag{1.2}$$

Propriedade 2: Para um impulso unitário $\delta(t)$,

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-st)\, dt = 1 \tag{1.3}$$

Propriedade 3: Para degrau unitário $u(t)$, com $s \in \Omega_u = \{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 0\}$,

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0}^{\infty} \exp(-st)\, dt = \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{1.4}$$

Propriedade 4: Para uma função exponencial $\exp(\lambda t)$, com $s \in \Omega_e = \{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s - \lambda) > 0\}$,

$$\mathcal{L}\{\exp(\lambda t) u(t)\} = \int_{0}^{\infty} \exp((\lambda - s)t)\, dt = \frac{1}{s - \lambda}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{1.5}$$

Note que esta é uma transformada *unilateral* (apenas um dos limites de integração tende ao infinito) por conta da multiplicação pela função degrau no integrando. A transformada mostrada em (1.1), em contrapartida, é *bilateral*.

Analogamente, se $s \in \Omega_e = \{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s - \lambda) < 0\}$, então

$$\mathcal{L}\{-\exp(\lambda t)u(-t)\} = -\int_{-\infty}^{0} \exp((\lambda - s)t)\,dt = \frac{1}{s-\lambda}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

isto é, deve ser feita uma integração usando um impulso não-causal para acomodar o domínio no qual a parte real de $s - \lambda$ é negativa.

Caso a exponencial seja complexa, da forma $\exp(j\lambda t)$, então, para $\lambda > 0$,

$$\mathcal{L}\{\exp(j\lambda t)u(t)\} = \frac{1}{s - j\lambda}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{1.6}$$

Propriedade 5: A transformada de Laplace é linear, ou seja, para constantes α, β,

$$\mathcal{L}\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{x(t)\} + \beta\mathcal{L}\{y(t)\} \tag{1.7}$$

Esta propriedade permite mostrar quais são as transformadas unilaterais do seno e do cosseno, através da fórmula de Euler. Para $\beta > 0$ e $\mathrm{Re}(s) > 0$,

$$\mathcal{L}\{\sin(\beta t)u(t)\} = \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{\exp(j\beta t)u(t)\} - \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{\exp(-j\beta t)u(t)\} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \tag{1.8}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)u(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\exp(j\beta t)u(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\exp(-j\beta t)u(t)\} = \frac{s}{s^2+\beta^2} \tag{1.9}$$

Propriedade 6: Para a integral da função $x(\beta)$, cuja própria transformada é $X(s)$,

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\beta)\,d\beta\right\} = \frac{X(s)}{s} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{x(t)\} \tag{1.10}$$

de forma que o domínio da função integral contém $\Omega_x \cap \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

Usando esta propriedade junto das equações (1.3) e (1.4), e sabendo que a função degrau é a integral da função impulso, deduz-se que, de forma geral,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!}u(t)\right\} = \frac{1}{s^{m+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0,\ m \in \mathbb{N} \tag{1.11}$$

Propriedade 7: A transformada de Laplace é reversível no tempo, tal que, para $-s \in \Omega_x$

$$\mathcal{L}\{x(-t)\} = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t)\exp(st)\,dt = X(-s) \tag{1.12}$$

Propriedade 8: A exponencial $\exp(-at)$ desloca a transformada em s, tal que, para $(s+a) \in \Omega_x$,

$$\mathcal{L}\{\exp(-at)x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-(s+a)t)\,dt = X(s+a) \tag{1.13}$$

De forma análoga às equações (1.14) e (1.15), para $\mathrm{Re}(s+a) > 0$,

$$\mathcal{L}\{\sin(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2} \tag{1.14}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2} \tag{1.15}$$

Propriedade 9: A m-ésima derivada da transformada $X(s)$, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^m X(s)}{ds^m} = (-1)^m \mathcal{L}\{t^m x(t)\} \Longleftrightarrow \mathcal{L}\{t^m x(t)\} = (-1)^m \frac{d^m X(s)}{ds^m} \tag{1.16}$$

Uma decorrência direta desta, aliada à propriedade (1.13), para $\text{Re}(s) > 0,\ m \in \mathbb{N}$, é que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} \exp{(-at)} u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}, \quad \text{Re}(s) > 0,\ m \in \mathbb{N} \tag{1.17}$$

Propriedade 10: A transformada de Laplace possui uma correspondente inversa, dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \tag{1.18}$$

que, caso exista, é única (Teorema de Lerch).

Em posse das propriedades, pode-se analisar as primeiras aplicações da transformada de Laplace: encontrar a função de transferência e a solução forçada de um sistema linear invariante no tempo (LIT). Seja fornecido um sistema da forma

$$\sum_n \alpha_n y^{(n)}(t) = f(x(t))$$

para uma função de saída $y(t)$ e função de entrada $x(t)$. Um caso simples dessa equação ocorre quando $f(x(t)) = \beta x(t)$ para uma constante β, a qual, nota-se, é um autovalor da equação quando $x(t) = \exp{(st)},\ s \in \mathbb{C}$. Assim sendo, a *solução forçada* $y_f(t)$ do sistema é

$$y_f(t) = H(s) \exp{(st)} \tag{1.19}$$

onde

$$H(s) = \frac{\beta}{\sum_n \alpha_n s^n} \tag{1.20}$$

é a *função de transferência* do sistema. Em posse desta, basta fazer manipulações para que ela fique na forma característica da propriedade equivalente e aplicar a transformada de Laplace inversa para encontrar a *resposta ao impulso causal* $h(t)$ e seu *domínio de existência* Ω_h. A situação inversa é analogamente válida: da solução forçada, pode-se encontrar a *função de transferência* com a transformada de Laplace da forma característica.

Todavia, com conhecimento da função $x(t)$, pode-ser encontrar também a solução forçada. Para tanto, basta escrever a entrada como uma soma de exponenciais na forma

$$x(t) = \sum_n \gamma_n \exp{(st)} \tag{1.21}$$

onde γ é uma constante. Se um dos termos de $x(t)$ for uma constante, basta fazer $s = 0$; se for um seno ou um cosseno, usa-se as convenientes substituições

$$\sin{(at)} = \frac{1}{2j} \exp{(jat)} - \frac{1}{2j} \exp{(-jat)}$$

$$\cos{(at)} = \frac{1}{2} \exp{(jat)} + \frac{1}{2} \exp{(-jat)}$$

e calcula-se a *solução forçada* usando a equação (1.19), desde que $H(s)$ seja sempre finito.

1.2 Exercícios propostos

1 **PR 2s2022**

Determine a solução forçada $y_f(t)$ para a entrada $x(t) = \exp(2) + \cos(3t)$ do sistema linear invariante no tempo descrito por

$$\ddot{y} + y = 5x$$

Solução

Reescrevendo a equação para encontrar a função de transferência via (1.19), (1.20),

$$\ddot{y}_f(t) + y_f(t) = 5x(t)$$
$$H(s)s^2 \exp(st) + H(s)\exp(st) = 5\exp(st)$$
$$\therefore\ H(s) = \frac{5}{s^2+1}$$

Via (1.21),

$$x(t) = \exp(2)\exp(0t) + \frac{1}{2}\exp(j3t) + \frac{1}{2}\exp(-j3t)$$

Logo,

$$y_f(t) = H(0)\exp(2) + H(j3)\frac{1}{2}\exp(j3t) + H(-j3)\frac{1}{2}\exp(-j3t)$$
$$H(0) = 5 \qquad H(j3) = \frac{5}{(j3)^2+1} = \frac{5}{-9+1} = -\frac{5}{8} \qquad H(-j3) = -\frac{5}{8}$$

Finalmente,

$$y_f(t) = 5\exp(2) - \frac{5}{8}\frac{1}{2}\exp(j3t) - \frac{5}{8}\frac{1}{2}\exp(-j3t) = \boxed{5\exp(2) - \frac{5}{8}\cos(3t)}$$

2 **PR 1s2023**

Determine a transformada de Laplace (bilateral) e o domínio de existência Ω_x para o sinal

$$x(t) = (10t^3\exp(2t) + 4t\exp(-5t))u(-t)$$

Solução

Reescrevendo o sinal de entrada em sua forma causal,

$$y(t) = x(-t) = (-10t^3\exp(-2t) - 4t\exp(5t))u(t)$$

Então, com (1.7) e (1.17)

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = -10\mathcal{L}\{t^3\exp(-2t)u(t)\} - 4\mathcal{L}\{t\exp(5t)u(t)\} =$$
$$= -60\mathcal{L}\left\{\frac{t^3}{3!}\exp(-2t)u(t)\right\} - 4\mathcal{L}\left\{\frac{t}{1}\exp(5t)u(t)\right\} =$$

$$= -\frac{60}{(s+2)^4} - \frac{4}{(s-5)^2}, \quad \Omega_y = \mathrm{Re}(s) > 5$$

Aplicando (1.12),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{y(-t)\} =& \\ &= -\frac{60}{(-s+2)^4} - \frac{4}{(-s-5)^2}, \quad \Omega_x = \mathrm{Re}(-s) > 5 \\ &= \boxed{-\frac{60}{(s-2)^4} - \frac{4}{(s+5)^2}, \quad \Omega_x = \mathrm{Re}(s) < -5}\end{aligned}$$

3 ***PR 2s2023***

Determine a transformada inversa (bilateral) de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para

$$X(s) = \frac{10}{s^2 - 2s + 5}, \quad \mathrm{Re}(s) < 1$$

Solução

Para uma equação quadrática da forma $x^2 + bx + c = 0$ que pode ser reescrita de maneira conveniente como $(x+f)^2 + g = x^2 + 2fx + (f^2 + g)$, ocorre que

$$b = 2f \qquad c = f^2 + g$$

Neste caso,

$$s^2 - 2s + 5 = (s-1)^2 + 4 \Rightarrow X(s) = \frac{10}{(s-1)^2 + 4}, \quad \mathrm{Re}(s) < 1$$

Aplicando (1.12),

$$\begin{aligned}Y(s) = X(-s) &= \frac{10}{(-s-1)^2 + 4}, \quad \mathrm{Re}(-s) < 1 \\ &= \frac{10}{(s+1)^2 + 4}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1\end{aligned}$$

Isto é feito para aplicar a propriedade (1.14), tal que

$$Y(s) = \frac{10}{2}\mathcal{L}\{\sin(2t)\exp(-t)u(t)\} \Rightarrow y(t) = 5\sin(2t)\exp(-t)u(t)$$

Finalmente,

$$x(t) = y(-t) = \boxed{5\sin(-2t)\exp(t)u(-t)}$$

Determine $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ (transformada de Laplace bilateral inversa) para

$$X(s) = \frac{3s^2 - 17s + 37}{(s-2)^2(s-5)}, \quad 2 < \text{Re}(s) < 5$$

Solução

Uma fração cujo denominador é um produto de polinômios pode ser seperada em uma soma de frações parciais, na qual cada fração possui como denominador um dos termos do produto. Assim sendo,

$$X(s) = \frac{3s^2 - 17s + 37}{(s-2)^2(s-5)} = \frac{A}{(s-2)^2} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-5}$$

$$\therefore\ A(s-5) + B(s-2)(s-5) + C(s-2)^2 = 3s^2 - 17s + 37$$

Escolhendo valores de s convenientes para isolar cada incógnita,

$$\begin{aligned} s = 5: &\quad C(3)^2 = 3(5)^2 - 17 \times 5 + 37 = 27 \Rightarrow C = 3 \\ s = 2: &\quad A(-3) = 3(2)^2 - 17 \times 2 + 37 = 15 \Rightarrow A = -5 \\ s = 0: &\quad A(-5) + B(-2)(-5) + C(-2)^2 = 37 \Rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$X(s) = \frac{-5}{(s-2)^2} + \frac{3}{s-5}$$

Via (1.5) e (1.17),

$$X(s) = -5\mathcal{L}\left\{\frac{t^1}{1}\exp(2t)u(t)\right\} + 3\mathcal{L}\{\exp(5t)u(t)\} = X_1(s) + X_2(s)$$

Todavia, nota-se que, no segundo termo, o domínio de existência da função é $\text{Re}(s) < 5$, o qual não é causal. Para corrigir este fato, usa-se a propriedade (1.12),

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{3}{s-5} \\ \Rightarrow Y_2(s) = X_2(-s) &= \frac{3}{-s-5}, \quad \text{Re}(-s) < 5 \\ &= -\frac{3}{s+5}, \quad \text{Re}(s) > -5 \end{aligned}$$

Fazendo agora a transformada inversa (1.18) e retornando para a função original,

$$y_2(t) = -3\exp(-5t)u(t) \Rightarrow x_2(t) = -3\exp(5t)u(-t)$$

Finalmente, é feita a transformada inversa da função $X(s)$ para todo o domínio:

$$\boxed{x(t) = -5t\exp(2t)u(t) - 3\exp(5t)u(-t)}$$

1.3 Algoritmos de resolução

Exercício 1

Dados: Entrada $x(t)$, equação do sistema linear.
Objetivo: Encontrar a solução forçada $y_f(t)$.

1. Reescrever a equação do sistema linear para usando (1.19) e encontrar a função de transferência $H(s)$ com (1.20) em seguida.
2. Escrever a entrada $x(t)$ como uma soma de exponenciais tal qual (1.21).
3. Escrever a solução forçada e encontrar os valores de $H(\cdot)$.
4. Calcular a solução $y_f(t)$ na forma final.

Exercício 2

Dados: Entrada $x(t)$.
Objetivo: Encontrar a transformada de Laplace (bilateral) e o domínio de existência Ω_x.

1. Reescrever a entrada $x(t)$ na forma causal (se necessário) usando reversão no tempo.
2. Calcular a transformada de Laplace usando a propriedade equivalente.
3. Determinar o domínio da existência com a mesma propriedade. Caso tenha sida feita a reversão no tempo, fazer novamente inversão no domínio para voltar à função original e ao seu domínio equivalente.

Exercício 3

Dados: Transformada da entrada $X(s)$ e seu domínio.
Objetivo: Encontrar a transformada de Laplace inversa (bilateral) $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$.

1. Reescrever o denominador de $X(s)$ na forma $(x+f)^2 + g$.
2. Aplicar (1.12) para ajustar o domínio e torná-lo causal, se necessário.
3. Realizar a transformada de Laplace inversa com a propriedade adequada. Caso tenha sido feita uma reversão no passo 2, desfazê-la no domíno do tempo.

Exercício 4

Dados: Transformada da entrada $X(s)$ e seu domínio.
Objetivo: Calcular a transformada de Laplace bilateral inversa $x(t)$.

1. Reescrever $X(s)$ utilizando frações parciais e determinar o domínio da função representada por cada fração $(X_1(s), X_2(s), ...)$.
2. Caso o domínio não seja causal, trocá-lo usando (1.12) antes de realizar a transformada. Caso contrário, fazer a transformada diretamente, usando a propriedade adequada.

2 EDOs via transformada de Laplace

2.1 Resumo teórico

Uma das formas de utilizar a transformada de Laplace em sistemas é na resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares a coeficientes constantes, para $t \geq 0$. Uma equação diferencial é dita *linear* se puder ser escrita na forma

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + ... + a_n y^{(n)}(t) = x(t) \tag{2.1}$$

Ainda, ela possui *coeficientes constantes* se todo $a_i, \forall i \in \mathbb{N}$ não for função do tempo.

Nesta condição temporal, a transformada de Laplace torna-se unilateral, definida por

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^\infty x(t) \exp(-st)\, dt \tag{2.2}$$

Naturalmente, as transformadas unilateral e bilateral são iguais para uma entrada $\delta(t)$, e a entrada unitária na unilateral é igual a uma entrada degrau $u(t)$ na bilateral. Além disso, podem ser deduzidas propriedades desta transformada para diferentes tipos de entrada.

Propriedade 1: A transformada da *m*-ésima derivada de $x(t)$ é, em geral,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m}{dt^m} x(t)\right\} = s^m X(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} \frac{d^k}{dt^k} f(0)$$

de forma que $\Omega_x \subset \Omega_{\dot{x}} \subset \Omega_{\ddot{x}} \dots \subset \Omega_{x^{(m)}}$, ou seja, o domínio de cada derivada é superconjunto do domínio da anterior.

Embora seja relevante saber da generalização, é mais comum utilizar apenas a primeira e a segunda derivada, simplificadas, respectivamente, por

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} x(t)\right\} = sX(s) - x(0) \tag{2.3}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right\} = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \tag{2.4}$$

Propriedade 2: Para $X(s) : \Omega_x = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > a\}, a \in \mathbb{R}$, seja $x(0^+) - x(0)$ finito. Então,

$$x(0^+) = \lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s) \tag{2.5}$$

onde $s \to \infty$ significa $\mathrm{Re}(s) \to \infty$ para $\mathrm{Im}(s)$ qualquer. Analogamente,

$$x(+\infty) = \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s) \tag{2.6}$$

se o limite do meio existe.

Neste ponto, é relevante fazer uma breve e simples digressão sobre análise complexa, a fim de entender um pouco sobre sua importância na transformada de Laplace.

Seja uma função $f : D \to \mathbb{C}$, onde D é um disco aberto. Se f é diferenciável em todo ponto de D, então ela é dita *holomorfa* neste domínio. Ademais, se todo ponto em D tem uma vizinhança tal que f e/ou $1/f$ são holomorfos nela, então a função também é dita *mesomorfa*.

A partir daqui, serão tratadas funções que são sempre holomorfas e mesomorfas em todo domínio, exceto em pontos específicos. Particularmente, interessa o comportamento dessas funções em seus polos, bem como nos polos do seu inverso – os zeros. Estes, todavia, nem sempre podem ser encontrados de forma trivial. Como escolher então uma função que obedeça às condições desejadas e que tenha polos e zeros fáceis de serem encontrados?

A melhor forma de resolver este impasse é escolhendo funções de sejam frações de polinômios, conforme o teorema abaixo.

Teorema 2 *Considere uma função do tipo*

$$f(z) = \frac{a(z)}{b(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_n z^n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Neste caso, os ***zeros*** *da função ocorrem quando $a(z) = 0$ e os* ***polos*** *ocorrem quando $b(z) = 0$, exatamente nos valores de z que garantem estas condições.*

Note que, por conseguinte, $a(z) = 0$ produz os polos e $b(z) = 0$ os zeros da função $1/f(z)$.[4]

Este conhecimento é necessário para a resolução de problemas e entendimento das propriedades acima. Ainda, são de interesse prático outras propriedades da transformada.

Propriedade 3: Seja o *operador derivada* $p^n = d^n/dt^n$ e $D(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_n p^n$, tal que um sistema linear possa ser escrito como

$$D(p)y(t) = x(t) \tag{2.7}$$

Dadas as condições iniciais (em $t = 0$), sua resposta pode ser decomposta em uma parcela de *entrada nula* $H(s)$ e outra de *condições nulas* $I(s)$.

Propriedade 4: As repostas ao degrau $u(t)$ e à rampa $r(t)$ de um sistema LIT racional estritamente próprio (grau do numerador menor que o do denominador) na forma $D(s)y(t) = N(s)x(t)$, com função de transferência

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{2.8}$$

são dadas por

$$y_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_u(s)\} \quad \text{onde} \quad Y_u(s) = H(s)X_u(s) = H(s)\frac{1}{s} \tag{2.9}$$

$$y_r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_r(s)\} \quad \text{onde} \quad Y_r(s) = H(s)X_r(s) = H(s)\frac{1}{s^2} \tag{2.10}$$

De forma geral, o formato de $X(s)$ obedece à propriedade (1.11).

2.2 Exercícios propostos

5 ***PR 2s2022***

(a) Determine a transformada unilateral de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ sendo $y(t)$ a solução da equação diferencial abaixo

$$\dot{y} - 2y = \exp(2t)\cos(3t)u(t), \quad y(0) \text{ dado}$$

(b) Determine a solução $y(t)$ para $y(1) = 5$.

Solução

Aplicando a equação (2.3) no lado esquerdo e a (1.15) no direito da equação diferencial,

$$sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2+3^2} \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{1}{s-2}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+3^2} + y(0)\right)$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2+3^2} + \frac{y(0)}{s-2} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{3}{(s-2)^2+3^2} + y(0)\frac{1}{s-2}$$

Fazendo a transformada inversa (1.18) com (1.14) e (1.5),

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{3}\exp(2t)\sin(3t)u(t) + y(0)\exp(2t)u(t)}$$

Conhecendo a solução final, basta substituir o valor dado para achar a condição inicial $y(0)$.

$$y(1) = \frac{1}{3}\exp(2)\sin(3) + y(0)\exp(2) = 5 \;\Rightarrow\; y(0) = 5\exp(-2) - \frac{1}{3}\sin(3)$$

$$\boxed{y(t) = \left[\frac{1}{3}\exp(2t)\sin(3t) + 5\exp(2t-2) - \frac{1}{3}\sin(3)\exp(2t)\right]u(t)}$$

6 ***PR 2s2023***

Determine a resposta ao degrau $y_u(t)$(condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 8\ddot{x} + 15\dot{x} + 52x$$

Solução

A equação diferencial deve ser reescrita utilizando o operador derivada como em (2.7),

$$(p^2 + 4p + 13)y = (8p^2 + 15p + 52)x$$

Então, a função de transferência é calculada via (2.8), fazendo $s = p$,

$$H(s) = \frac{8s^2+15s+52}{s^2+4s+13} = \frac{8s^2+15s+52}{(s+2)^2+3^2}$$

Aplicando (2.9) e reescrevendo a equação de forma conveniente com frações parciais,

$$Y_u(s) = \frac{8s^2+15s+52}{(s+2)^2+3^2}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{A}{s} + \frac{B(s+2)}{(s+2)^2+3^2} + \frac{3C}{(s+2)^2+3^2}$$

Logo,

$$A[(s+2)^2+9] + B(s+2)s + 3Cs = (A+B)s^2 + (4A+2B+3C)s + (13A) = 8s^2+15s+52$$

donde é direto encontrar que $A = 4, B = 4, C = -3$, e, assim,

$$Y_u(s) = \frac{4}{s} + 4\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right) - 3\left(\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right)$$

Solução *continuação*

Finalmente, com (1.4), (1.15) e (1.14), respectivamente, deduz-se que a resposta ao degrau é

$$\boxed{y_u(t) = (4 + \exp(-2t)(4\cos(3t) - 3\sin(3t)))\, u(t)}$$

7 ***PC 1s2023***

Determine o valor da integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 h(t)\, dt, \quad h(t) = t^3 \exp(-5t) u(t)$$

Solução

O primeiro passo é encontrar a função de transferência a partir da resposta ao impulso. Assim, via (1.17),

$$H(s) = \mathcal{L}\{t^3 \exp(-5t) u(t)\} = 6\mathcal{L}\left\{\frac{t^3}{3!}\exp(-5t)u(t)\right\} = \frac{6}{(s+5)^4}$$

Considere agora a definição da transformada de Laplace em (1.1). Nota-se que

$$\mathcal{L}\{t^2 h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 h(t) \exp(-st)\, dt \;\Rightarrow\; I = \mathcal{L}\{t^2 h(t)\}\Big|_{s=0}$$

Então, usando (1.16),

$$I = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{h(t)\}\Big|_{s=0} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{6}{(s+5)^4}\right)\Big|_{s=0} = 6\frac{d}{ds}\left(-\frac{4}{(s+5)^5}\right)\Big|_{s=0} =$$
$$= -24\left(\frac{-5}{(s+5)^6}\right)\Big|_{s=0} = \frac{120}{5^6} = \boxed{\frac{24}{3125}}$$

8 ***PR 2s2022***

Determine, para a transformada (unilateral) de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ de um sinal causal dada por

$$Y(s) = \frac{5(s+2)(s+3)}{2s(s^2+4s+8)}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

(a) o valor final $y(+\infty)$ (b) o valor inicial $y(0^+)$

Solução

Pelo Teorema 2, sabe-se que os polos da função acima estão nas singularidades s nas quais

$$2s(s^2 + 4s + 8) = 0 \;\Rightarrow\; s_1 = 0 \quad s_2 = -2 \pm 2j$$

Analisando a equação (2.6), nota-se que a condição de existência é satisfeita, pois o limite no domínio do tempo existe.

Solução *continuação*

Logo,

$$y(+\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{5(s+2)(s+3)}{2(s^2+4s+8)} = \frac{5(2)(3)}{2(8)} = \boxed{\frac{15}{8}}$$

Analogamente, pela equação (2.5), a condição de existência é satisfeita, pois $x(0^+) - x(0)$ é finito. Então,

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{5(s+2)(s+3)}{2(s^2+4s+8)} = \lim_{s\to\infty} \frac{5(s^2+5s+6)}{2(s^2+4s+8)} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

2.3 Algoritmos de resolução

Exercício 5

Dados: Equação diferencial linear de coeficientes constantes, e solução particular $y(\cdot)$.
Objetivo: (a) Transformada unilateral de Laplace $Y(s)$ e (b) solução geral $y(t)$.

1. Aplicar a transformada da derivada, (2.3) e/ou (2.4), e a definição, (2.2), ao lado esquerdo da igualdade. Aplicar ao lado direito a propriedade adequada.

2. Isolar $Y(s)$ e reescrever a equação de forma conveniente.

3. Fazer a transformada inversa para obter $y(t)$, com as propriedades adequadas.

4. Substituir o valor da solução particular $y(\cdot)$ em $y(t)$ para encontrar $y(0)$. Caso $y(0)$ já seja a solução particular fornecida, pular este passo.

5. Substituir o valor de $y(0)$ em $y(t)$ e escrever a solução geral na forma final.

Exercício 6

Dados: Equação diferencial de um sistema LIT causal.
Objetivo: Encontrar a resposta ao degrau $y_u(t)$.

1. Reescrever ambos os lados da equação usando o operador derivada.

2. Fazer $s = p$ e isolar a função de transferência via (2.8).

3. Calcular $Y_u(s)$ usando (2.9) e reescrevê-lo usando separação por frações parciais.

4. Aplicar a propriedade adequada para encontrar $y_u(t)$ com a transformada inversa.

Exercício 7

Dados: Integral de uma função do tipo $f(t) = g(t)h(t)$
Objetivo: Calcular o valor da integral

1. Caso a função $h(t)$ não esteja explícita, determiná-la de forma conveniente para calcular $H(s)$ – geralmente na forma $f(t) = t^m h(t),\ m \in \mathbb{N}$. Caso contrário, calcular $H(s)$ diretamente a partir do $h(t)$ dado.

2. Escrever a integral na forma $I = \mathcal{L}\{f(t)\}$ conveniente.

3. Aplicar a propriedade adequada para calcular a transformada.

Exercício 8

Dados: Transformada unilateral de Laplace $Y(s)$ e seu domínio.
Objetivo: Determinar os valores final e inicial, caso existam.

1. Determinar os valores de s dos polos a partir de $Y(s)$ e do Teorema 2.

2. Utilizar as equações (2.5) e (2.6) para verificar se os valores existem. Em caso negativo, denotar o respectivo item por $\nexists$. Em caso positivo, calcular seu valor através do limite de $Y(s)$ correspondente.

3 EDOs via coeficientes a determinar

3.1 Resumo teórico

No capítulo anterior, a transformada de Laplace foi utilizada para resolver equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes. Todavia, há outra forma de resolver o mesmo problema: o método dos coeficientes a determinar. Para tanto, considere a equação diferencial *homogênea*

$$D(p)y(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k y(t) = 0 \tag{3.1}$$

onde α_k é um coeficiente constante e p^k é o operador derivada. Além disso, com $\alpha_m = 1$ e condições inicias conhecidas, o sistema é dito *autônomo*.

Antes de determinar as propriedades da solução de EDOs homogêneas, é relevante definir os conceitos de independência linear e base. Um conjunto de sinais $\{y_k(t)\}$, $k = 1, ..., m$ possui *independência linear* se, e somente se,

$$\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t) = 0,\ \forall t \implies c_k = 0,\ \forall k \tag{3.2}$$

ou seja, uma solução nula da soma linear ocorre apenas se todos os coeficientes forem nulos. Ainda, a combinação linear de um conjunto de m sinais, dada por

$$y(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t), \quad c_k \in \mathbb{C} \tag{3.3}$$

gera um espaço linear de dimensão $r \leq m$. Um conjunto de r sinais que gere o mesmo espaço é dito uma *base* deste.

Sejam agora as propriedades das soluções de EDOs homogêneas.

Propriedade 1: Os sinais

$$y_1(t) = \exp(\lambda_1 t),\ y_2(t) = \exp(\lambda_2 t) \tag{3.4}$$

são linearmente independentes se, e somente se, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Propriedade 2: As funções

$$y_1(t) = \exp(\lambda t),\ y_2(t) = p^k \exp(\lambda t) \tag{3.5}$$

são linearmente dependentes, visto que $y_2(t) = \lambda^k y_1(t)$. Dito de outra forma, uma autofunção do sistema é dependente de suas derivadas.

Propriedade 3: A função $y(t) = \exp(\lambda t)$ é solução de (3.1) se, e somente se,

$$D(\lambda) = 0 \tag{3.6}$$

Esta solução é dita *modo próprio* do sistema linear.

Propriedade 4: Se todas as raízes λ_k de $D(\lambda) = 0$ forem distintas, então

$$y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \exp(\lambda_k t) \tag{3.7}$$

é solução de (3.1) e os modos próprios $\exp(\lambda_k t)$ são linearmente independentes.

Propriedade 5: Para o produto $t \exp(\lambda t)$,

$$D(p)(t \exp(\lambda t)) = tD(\lambda) \exp(\lambda t) + \exp(\lambda t) \frac{d}{d\lambda} D(\lambda) \tag{3.8}$$

Propriedade 6: Se λ é raiz de multiplicidade r (isto é, r vezes raiz) de $D(\lambda)$, então

$$y_0(t), y_1(t), ..., y_{r-1}(t) = \exp(\lambda t), t \exp(\lambda t), ..., t^{r-1} \exp(\lambda t) \tag{3.9}$$

são modos próprios de (3.1). Um caso particular bastante utilizado é quando $r = 2$, ou seja, λ é raiz dupla da equação característica.

Propriedade 7: Qualquer solução de (3.1) é dada pela combinação linear de seus m modos próprios.

Em posse destas propriedades, é o conhecimento das raízes e suas multiplicidades – quantas vezes elas se repetem – que permite descrever o tipo de solução para determinado problema. Os casos mais recorrentes são listados abaixo, sendo todos uma aplicação literal de (3.7) e (3.9).

Caso 1: Raiz singular, $(\alpha p + \beta)y = 0$.

$$\lambda = -\frac{\beta}{\alpha} \implies y(t) = A \exp(\lambda t) \tag{3.10}$$

Caso 2: Raízes distintas, $(\alpha p^2 + \beta p + \gamma)y = 0$.

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \implies y(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \tag{3.11}$$

Neste que esta relação é válida tanto para raízes reais quanto complexas. Lembre-se sempre que as raízes complexas são dadas por pares conjugados.

Caso 3: Raízes repetidas, $(\alpha p + \beta)^2 y = 0$.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \implies y(t) = A_1 \exp(\lambda t) + A_2 t \exp(\lambda t) \tag{3.12}$$

Até então, foram consideradas características e propriedades de uma equação homogênea. Todavia, pode ocorrer que ela seja não-homogênea, a qual é descrita pela solução característica

$$D(p)y(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k y(t) = N(p)x(t) \neq 0 \tag{3.13}$$

onde α_k é um coeficiente constante e p^k é o operador derivada. Além disso, com $\alpha_m = 1$ e condições inicias conhecidas, o sistema é dito *não autônomo*.

A resolução de (3.13) é ditada pelo polinômio $\bar{D}(p)$, que nada mais é do que aquele que satisfaz

$$\bar{D}(p)x(t) = 0 \implies \bar{D}(p)D(p)y(t) = N(p)\bar{D}(p)x(t) = 0 \tag{3.14}$$

Como no caso homogêneo, a solução $D(p)$ é dita *modo próprio* e a solução $\bar{D}(p)$ é o *modo forçado*. As raízes do modo forçado são dadas por γ. O método dos coeficientes a determinar pode ser aplicado em (3.13) seguindo duas propriedades: a da solução forçada e da resposta ao impulso.

Propriedade 8: Toda entrada possui parcelas homogênea $y_h(t)$ e forçada $y_f(t)$ (devido à entrada). Como $D(p)y_h(t) = 0$, então

$$\bar{D}(p)y_f(t) = N(p)x(t) \tag{3.15}$$

Propriedade 9: Caso a entrada do sistema seja uma função impulso $\delta(t)$, então o sistema com $D(p)y(t) = N(p)x(t)$ é resolvido como $D(p)f(t)$. Portanto, a resposta do degrau $y_u(t)$ e a resposta ao impulso $h(t)$ são respectivamente dadas por

$$y_u(t) = N(p)(f(t)u(t)), \quad h(t) = pN(p)(f(t)u(t)) = py_u(t) \tag{3.16}$$

3.2 Exercícios propostos

9

PR 1s2023

(a) Determine a solução forçada $y_f(t)$ da equação diferencial

$$\ddot{y} + \dot{y} = 5(1 + \exp(-t))$$

(b) Determine solução para $y(0) = 10, \dot{y}(0) = 10$.

Solução

Reescrevendo a equação na forma (3.13), tem-se

$$(p^2 + p)y = 5 + 5\exp(-t)$$

Como $D(p) = p(p+1)$, suas raízes são

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$$

Para conseguir a solução forçada, deve haver um polinômio aniquilador $\bar{D}(p)$ que siga (3.14). Visto que $x(t) = 5 + 5\exp(-t)$, o primeiro termo é constante e, portanto, eliminado com uma derivação. Para o segundo termo,

$$\frac{d}{dt}5\exp(-t) = -5\exp(-t) \implies 5\exp(-t) + \frac{d}{dt}5\exp(-t) = 0$$

Logo,

$$\bar{D}(p) = p^2 + p = p(p+1)$$

pois derivando duas vezes o termo com a exponencial e somando-o à primeira derivada, ele é eliminado. Então,

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = -1$$

são as raízes, e a equação fica da forma

$$(p^2 + p)^2 y = 0$$

Por inspeção, nota-se que é um caso de duas raízes reais e distintas que se repetem duas vezes cada. Então, a solução forçada segue as formas de (3.11) e (3.12), tal que

$$y_f(t) = B_1 t\exp(\gamma_1 t) + B_2 t\exp(\gamma_2 t) = B_1 t + B_2 t\exp(-t)$$

Para encontrar os valores das constantes, a equação é substituída como em (3.15). Assim,

$$(p^2 + p)(B_1 t + B_2 t\exp(-t)) = 5 + 5\exp(-t)$$

$$\therefore \underbrace{-B_2t(-\exp(-t)) - B_2\exp(-t) + B_2(-\exp(-t))}_{p^2} + \underbrace{B_1 + B_2t(-\exp(-t)) + B_2\exp(-t)}_{p} =$$
$$= \underbrace{B_2t\exp(-t) - 2B_2\exp(-t)}_{p^2} + \underbrace{B_1 - B_2t\exp(-t) + B_2\exp(-t)}_{p} = B_1 - B_2\exp(-t) =$$
$$= 5 + 5\exp(-t)$$

Conclui-se diretamente que $B_1 = 5$, $B_2 = -5$. Finalmente, a solução forçada é

$$\boxed{y_f(t) = 5t - 5t\exp(-t)}$$

Apesar do trabalho até aqui, ainda não acabou. Em posse da solução forçada, são aplicadas as condições iniciais para deduzir a solução homogênea e compor a solução geral, como mostrado em (3.15). Logo,

$$D(p)y_h(t) = (p^2 + p)y_h(t) = 0 \ \therefore \ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$$

Via (3.11),

$$y_h(t) = A_1\exp(\lambda_1 t) + A_2\exp(\lambda_2 t) = A_1 + A_2\exp(-t)$$

A solução geral e sua respectiva derivada são da forma

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_f(t) = A_1 + A_2\exp(-t) + 5t - 5t\exp(-t) \\ \dot{y}(t) &= -A_2\exp(-t) + 5 - 5\exp(-t) + 5t\exp(-t) = 5 + (5t - 5 - A_2)\exp(-t) \end{aligned}$$

Usando as condições iniciais fornecidas,

$$\begin{aligned} y(0) = 10 \ &\therefore \ A_1 + A_2 = 10 \\ \dot{y}(t) = 10 \ &\therefore \ 5 + (-5 - A_2) = 10 \\ \Rightarrow A_2 &= -10 \\ A_1 &= 20 \end{aligned}$$

Finalmente, a solução geral é escrita com os valores encontrados.

$$\boxed{y(t) = 20 - 10\exp(-t) + 5t - 5t\exp(-t)}$$

10 ***PR 1s2022***

Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução da equação

$$(p^2 + 1)y = \cos(t) \quad y(0) = 5, \quad \dot{y}(0) = 10$$

Solução

Diretamente, nota-se que

$$D(p) = p^2 + 1 \implies \lambda_1, \lambda_2 = \pm j$$

Solução *continuação*

A determinação do polinômio aniquilador $\bar{D}(p)$ para $x(t) = \cos(t)$ é trivial:

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(t) = -\cos(t) \implies (p^2+1)\cos(t) = -\cos(t) + \cos(t) = 0$$

$$\therefore\ \bar{D}(p) = p^2 + 1$$

Disto, pode-se escrever a EDO homogênea que pode produzir a mesma solução, via (3.14),

$$\boxed{(p^2+1)^2 y(t) = 0}$$

Da equação acima, nota-se que

$$(p^2+1)y(t) = \cos(t)\ \therefore\ \ddot{y}(0) + y(0) = 1$$

$$\Rightarrow\ \ddot{y}(0) = 1 - 5 = -4$$

Agora, derivando os dois lados da equação,

$$(p^3+p)y(t) = -\sin(t)\ \therefore\ \dddot{y}(0) + \dot{y}(0) = 0$$

$$\Rightarrow\ \dddot{y}(0) = 0 - 10 = -10$$

Como a equação original era de segundo grau, então a terceira derivada é a última necessária. Portanto, as condições iniciais são:

$$\boxed{y(0) = 5 \quad \dot{y}(0) = 10 \quad \ddot{y}(0) = -4 \quad \dddot{y}(0) = -10}$$

3.3 Algoritmos de resolução

Exercício 9

Dados: Equação diferencial linear e condições iniciais.
Objetivo: Determinar a expressão da solução forçada $y_f(t)$ e, depois, a geral $y(t)$.

1. Reescrever a equação com o operador derivada e determinar as raízes λ.
2. Calcular o polinômio aniquilador $\bar{D}(p)$ e as raízes γ.
3. Escrever nova forma da equação e sua respectiva solução forçada característica, usando as propriedades (3.10), (3.11) e (3.12).
4. Calcular a relação $\bar{D}(p)y_f(t)$ a partir da equação original, o que permite saber $y_f(t)$.
5. Utilizar as condições iniciais para calcular a solução homogênea $y_h(t)$, repetindo os passos anteriores.
6. Calcular a solução geral como $y(t) = y_f(t) + y_h(t)$.

Dados: Equação diferencial não-homogênea e condições iniciais.
Objetivo: Encontrar uma EDO homogênea (e suas condições iniciais) que produza a mesma solução.

1. Determinar $D(p)$, λ e, com isso, $\bar{D}(p)$.
2. Escrever a EDO homogênea.
3. Calcular as condições iniciais a partir da equação original, derivando-a sempre que necessário.

4 Resposta em frequência

4.1 Resumo teórico

Neste capítulo, é proposta uma forma prática de lidar com sistemas diferenciais lineares, através da análise de sua saída no domínio da frequência, denominada *resposta em frequência*. Para tanto, é utilizado novamente o conceito de *função de transferência*. Por definição, esta é a relação entre entrada transformada $X(s)$ e saída transformada $Y(s)$ de um sistema qualquer,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{4.1}$$

A relevante manipulação que pode-se fazer com este tipo de propriedade é escrever seu domínio em termos da frequência angular ω complexa, característica do sistema, ou seja, fazer $s = j\omega$. Assim,

$$H(j\omega) = M(\omega)\exp\left[j\phi(\omega)\right] \tag{4.2}$$

Agora, a função fica escrita em termos de seu *módulo* $M(\omega)$ e sua *fase* $\phi(\omega)$. Descrever um sistema em termos destas duas características permite conhecer muito melhor seu comportamento.

A maneira mais prática de fazer isso é através dos *diagramas de Bode*, um método gráfico inventado para aproximar medidas de estabilidade em sistemas eletrônicos, que hoje possui largas aplicações em teoria de controle e telecomunicações. Abaixo se discute sua construção.

O diagrama se baseia na construção de retas que aproximam um comportamento assintótico. Ele possui como domínio a frequência ω [rad/s] em escala logarítmica – dividido em *décadas*. Todavia, sua imagem pode ser tanto o módulo $M(\omega)$ quanto a fase $\phi(\omega)$. No primeiro caso, com escala linear, é medido em decibéis [dB], calculado por

$$M_{dB}(\omega) = 20\log_{10} M(\omega) \tag{4.3}$$

No segundo caso, é utilizada novamente uma escala linear, cuja medida é angular, em graus [º].

Para realizar o esboço do diagrama através de retas, é conveniente que a função de transferência seja dividida em intervalos – tal que a curva final seja contínua por partes. Para tanto, dada uma $H(s)$, ela será decomposta em produtos $H_i(s)$, ou seja,

$$H(s) = \prod_{i=1}^{m} H_i(s) = H_1(s)H_2(s)H_3(s)\cdots H_m(s)$$

de maneira que cada termo corresponda a um de cinco casos (e respectiva propriedade) adiante.

Propriedade 1: Ganho constante, $H_i(s) = \pm k$

$$k > 0 \implies M_{dB}(\omega) = 20\log(k),\ \phi(\omega) = 0 \tag{4.4}$$

$$k < 0 \implies M_{dB}(\omega) = 20\log(k),\ \phi(\omega) = 180° \tag{4.5}$$

No gráfico, isto representa uma reta horizontal nos respectivos valores M_{dB}, $\phi(\omega)$.

Propriedade 2: Zero de ordem m na origem, $H_i(s) = s^m/k,\ m \in \mathbb{Z}_+$

$$M_{dB} = 20m\log(\omega),\ \phi(\omega) = 90m° \tag{4.6}$$

No gráfico de módulo, isto é uma reta crescente que cruza o domínio em $\omega = k$ e com inclinação $20m\, dB/dec$. Em fase, é uma reta horizontal em $90m°$.

Propriedade 3: Polo de ordem m na origem, $H_i(s) = k/s^m,\ m \in \mathbb{Z}_+$

$$M_{dB} = -20m\log(\omega),\ \phi(\omega) = -90m^\circ \tag{4.7}$$

No gráfico de módulo, isto é uma reta decrescente que cruza o domínio em $\omega = k$ e com inclinação $-20m\,dB/dec$. Em fase, é uma reta horizontal em $-90m^\circ$.

Propriedade 4: Zero

$$H_i(s) = \frac{s+A}{A},\ A > 0 \tag{4.8}$$

$$M_{dB,z} = \begin{cases} 20\log(\omega) & \forall\,\omega > A \\ 0 & \forall\,\omega \leq A \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\phi_z(\omega) = \begin{cases} 0 & \forall\,\omega \leq 10^{-1}A \\ 45\log(\omega) & \forall\,10^{-1}A \leq \omega \leq 10A \\ 90 & \forall\,\omega \geq 10A \end{cases} \tag{4.10}$$

No gráfico de módulo, a partir do valor de A, há uma reta infinitamente crescente com inclinação $20\,dB/dec$. No gráfico de fase, há uma reta crescente com inclinação $45\,dB/dec$ desde a década anterior até a década posterior a A, e constantes fora do intervalo.

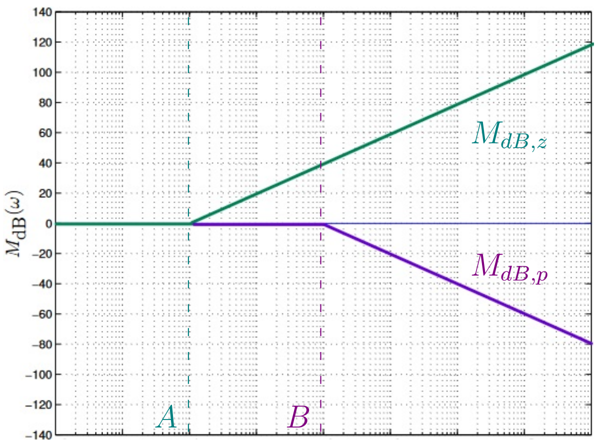
Propriedade 5: Polo

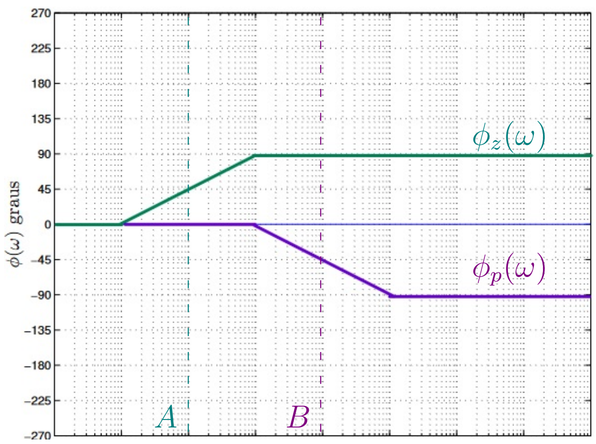
$$H_i(s) = \frac{B}{s+B},\ B > 0 \tag{4.11}$$

$$M_{dB,p} = \begin{cases} -20\log(\omega) & \forall\,\omega > B \\ 0 & \forall\,\omega \leq B \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\phi_p(\omega) = \begin{cases} 0 & \forall\,\omega \leq 10^{-1}B \\ -45\log(\omega) & \forall\,10^{-1}B \leq \omega \leq 10B \\ -90 & \forall\,\omega \geq 10B \end{cases} \tag{4.13}$$

No gráfico de módulo, a partir do valor de B, há uma reta infinitamente decrescente com inclinação $-20\,dB/dec$. No gráfico de fase, há uma reta decrescente com inclinação $-45\,dB/dec$ desde a década anterior até a década posterior a B, e constantes fora do intervalo.





Representação gráfica dos efeitos de polos e zeros, em módulo e fase, usando dois valores diferentes de frequência angular, $\omega = A, B$.

Propriedade 6: Para a entrada $x(t) = \sum_i K_i \cos(\omega_i t) + \sum_j K_j \sin(\omega_j t)$, a solução forçada é:

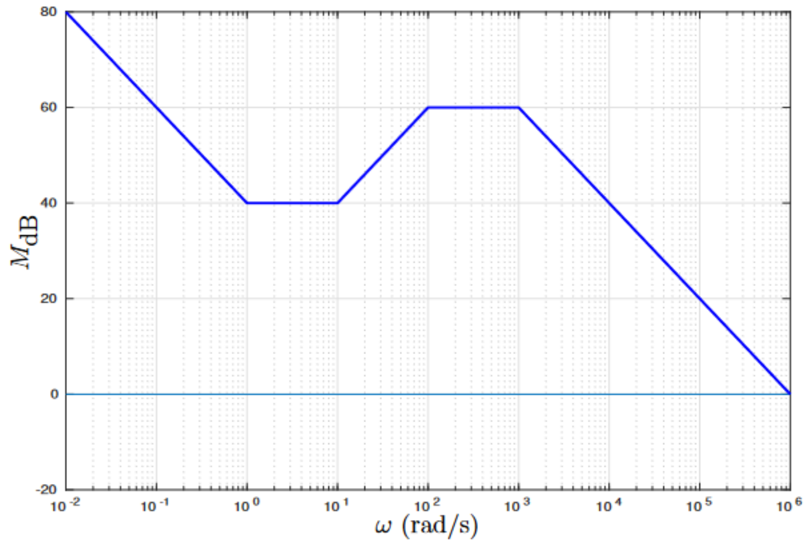
$$y_f(t) = \sum_i M(\omega_i) K_i \cos(\omega_i t + \phi(\omega_i)) + \sum_j M(\omega_j) K_j \sin(\omega_j t + \phi(\omega_j)) \tag{4.14}$$

onde, via (4.3), $M(\omega) = 10^{M_{dB}(\omega)/20}$.

4.2 Exercícios propostos

11 ***PR 2s2023***

Considere as assíntotas de módulo do diagrama de Bode em escala logarítmica da função de transferência de um sistema linear invariante no tempo de fase mínima da figura abaixo.



(a) Esboce as assíntotas de fase, em graus e (b) baseando-se nos diagramas assintóticos, determine a solução forçada do sistema para a entrada $x(t) = 20\cos(10t) + 50\sin(1000t)$.

Solução

(a) O primeiro passo é analisar o gráfico para apontar onde estão os zeros e polos e, para cada termo, qual seria o comportamento análogo em fase.

1. $\omega \in [10^{-2}, 10^{0}]$: reta descendente, que, se estendida, cruza o eixo M_{dB} em $\omega = 10^2$. Via (4.7),
$$\therefore\ \phi(\omega) = -90°, \quad \omega \in [10^{-2}, 10^{6}]$$
2. $\omega \in [10^{0}, 10^{1}]$: reta constante em $M_{dB} = 40$. Para tanto, deve haver um zero a partir de $\omega = 10^0$. Via (4.10),
$$\therefore\ \phi(\omega) = \phi_z(\omega) \quad \text{onde} \quad A = 10^0$$
3. $\omega \in [10^{1}, 10^{2}]$: reta crescente. Para tanto, deve haver outro zero a partir de $\omega = 10^1$. Via (4.10),
$$\therefore\ \phi(\omega) = \phi_z(\omega) \quad \text{onde} \quad A = 10^1$$

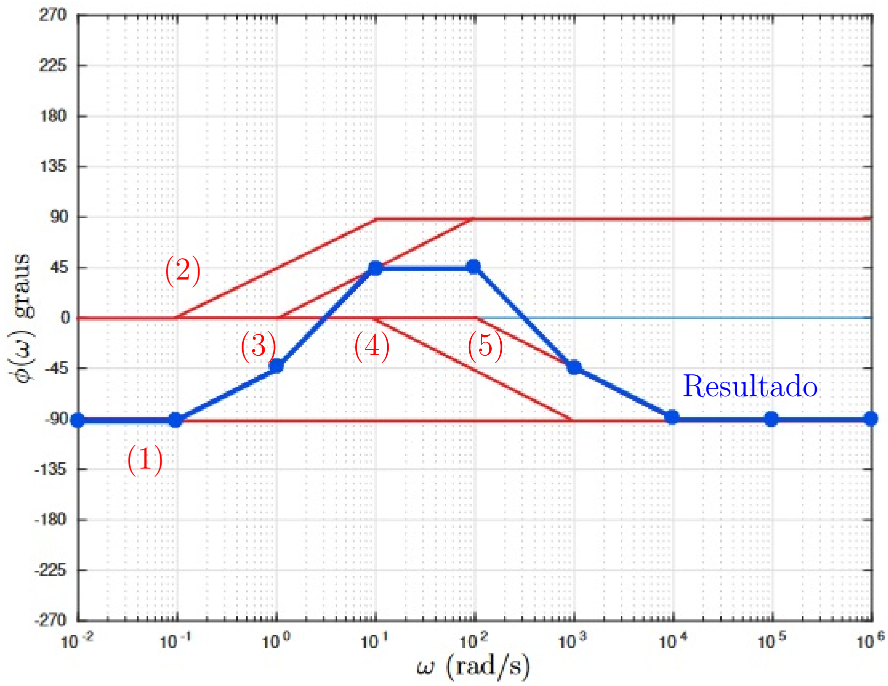
4. $\omega \in [10^2, 10^3]$: reta constante em $M_{dB} = 60$. Para tanto, deve haver um polo a partir de $\omega = 10^2$. Via (4.13),

$$\therefore \ \phi(\omega) = \phi_p(\omega) \quad \text{onde} \quad B = 10^2$$

5. $\omega \in [10^3, 10^6]$: reta decrescente. Para tanto, deve haver outro polo a partir de $\omega = 10^3$. Via (4.13),

$$\therefore \ \phi(\omega) = \phi_p(\omega) \quad \text{onde} \quad B = 10^3$$

Juntando todos os intervalos, pode-se construir o gráfico final da fase, como mostrado abaixo. A retas em vermelho representam cada um dos passos acima, enquanto a curva em azul mostra seu somatório para cada valor de frequência angular.



Note, com atenção, que algumas retas ficam soprepostas. Por exemplo, em $\omega \in [10^2, 10^6]$ na fase $\phi(\omega) = 90°$, passam as curvas de (2) e (3). Para calcular o resultado final, deve-se considerar ambas, isto é, que elas contribuem com $180°$ para o resultado final. Isto deve, evidentemente, ser feito a todo momento, mas é importante ter cuidado com retas sobrepostas.

(b) A partir da entrada $x(t) = 20\cos(10t) + 50\sin(1000t)$, usando (4.14), sabe-se que:

$$y_f(t) = 20M_{dB}(10^1)\cos(10t + \phi(10^1)) + 50M_{dB}(10^3)\sin(1000t + \phi(10^3))$$

Ao analisar o gráfico resultante do módulo, nota-se que

$$M(10^1) = 10^{40/20} = 100 \qquad M(10^3) = 10^{60/20} = 1000$$

Ao analisar o gráfico resultante da fase, nota-se que

$$\phi(10^1) = 45° \phi(10^3) = -45°$$

Combinando estas informações, é escrita a solução forçada,

Solução

continuação

$$\boxed{y_f(t) = 2000\cos(10t + 45°) + 50000\sin(1000t - 45°)}$$

12 **PR 1s2022**

(a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{10^5(s+100)}{(s+1)(s+10000)}$$

(b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.

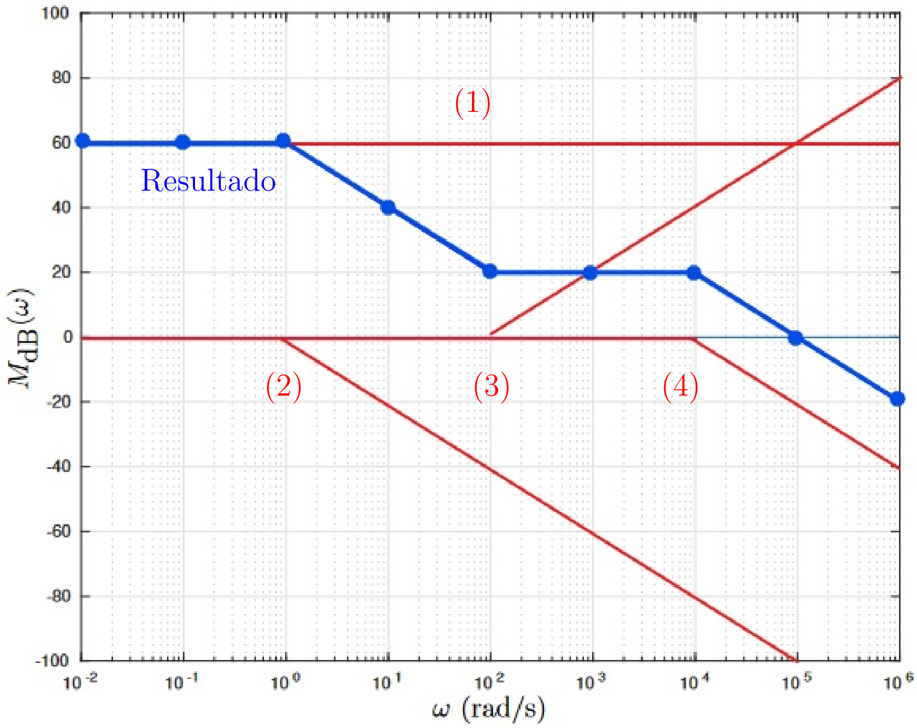
Solução

(a) O primeiro passo é decompor a função de transferência, a fim de explicitar os casos.

$$H(s) = 10^5\left(\frac{100}{10000}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{s+100}{100}\right)\left(\frac{10000}{s+10000}\right) = \underbrace{10^3}_{1}\underbrace{\left(\frac{1}{s+1}\right)}_{2}\underbrace{\left(\frac{s+100}{100}\right)}_{3}\underbrace{\left(\frac{10000}{s+10000}\right)}_{4}$$

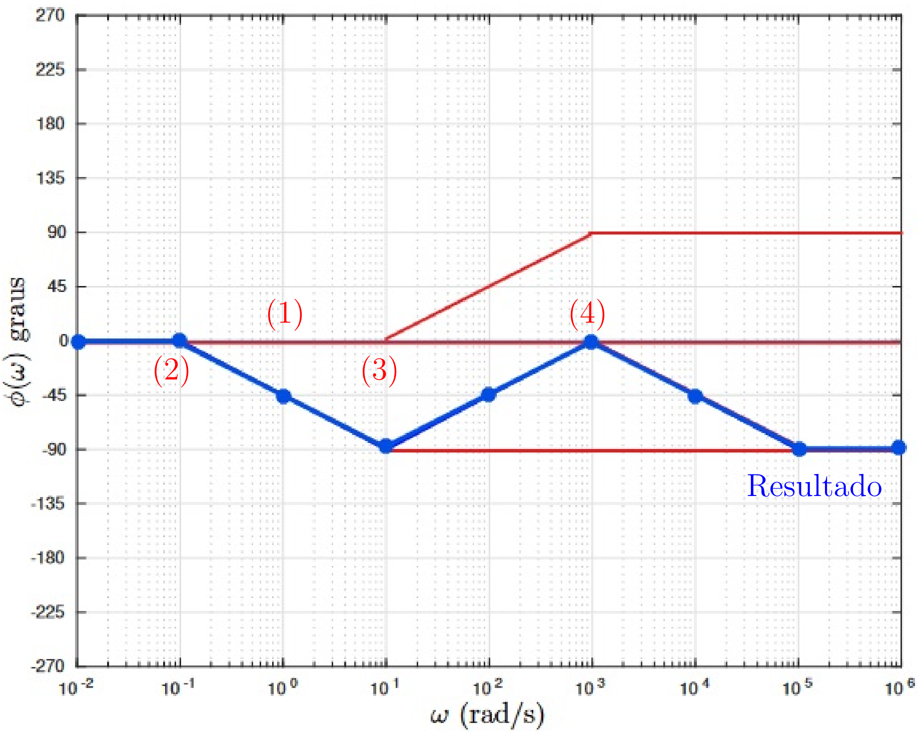
Portanto, pode-se escrever quais são as correspondências no gráfico.

1. Pela definição, $M_{dB}(\omega) = 20\log_{10} M(\omega) = 20\log_{10}(10^3) = 60$.
2. Polo, a partir de $\omega = 10^0$, ou seja, $M_{dB,p}$ com $B = 10^0$.
3. Zero, a partir de $\omega = 10^2$, ou seja, $M_{dB,z}$ com $A = 10^2$.
4. Polo, a partir de $\omega = 10^4$. ou seja, $M_{dB,p}$ com $B = 10^4$.



(b) O processo análogo ao item anterior é repetido para encontrar o gráfico de fases a partir dos termos da função de transferência.

1. Via (4.4), $M_{dB} = 60 \implies \phi(\omega) = 0 : \omega \in [10^{-2}, 10^{6}]$.
2. Polo, via (4.13), $\phi_p(\omega) : B = 10^0$.
3. Zero, via (4.10), $\phi_z(\omega) : A = 10^2$.
4. Polo, via (4.13), $\phi_p(\omega) : B = 10^4$.



4.3 Algoritmos de resolução

Exercício 11

Dados: Diagrama de Bode em módulo.
Objetivo: Encontrar o diagrama de Bode em fase e a solução forçada para uma entrada $x(t)$.

1. Descrever o comportamento do digrama em intervalos, identificando quais elementos são responsáveis por cada parte: ganhos constantes, zeros e polos de ordem m na origem e zeros e polos no plano.
2. Usar a propriedade equivalente para determinar o comportamento em fase, e desenhar cada curva no digrama.
3. Encontrar o resultado, somando o valor de cada curva em cada década.
4. Com posse dos diagramas, utilizar (4.14) para calcular a solução forçada.

Exercício 12

Dados: Função de transferência de um sistema linear.
Objetivo: Encontrar os diagramas de Bode em módulo e fase.

1. Reescrever a função de transferência, isolando os termos para identificar os elementos: ganhos constantes, zeros e polos de ordem m na origem e zeros e polos no plano.
2. Desenhar o diagrama de módulo usando as propriedades correspondentes.
3. Desenhar o diagrama de fase usando as propriedades correspondentes.

5 Transformada Z e aplicações

5.1 Resumo teórico I

Até então, foram tratadas funções cujo domínio era contínuo, no tempo e na frequência, fato que permite a aplicação da transformada de Laplace e suas respectivas propriedades. Todavia, como podem ser resolvidos problemas cujos domínios são discretos no tempo? A resposta é um equivalente da transformada de Laplace: a *transformada Z*. Para aplicá-la, deseja-se que o domínio seja representado por uma *sequência* $x[n]$, isto é, um conjunto ordenado de elementos.

No contexto de sistemas dinâmicos, então, a transformada Z permite obter a relação entre a resposta amostrada $h[n]$ e a função de transferência $H(z)$ do sistema proposto, por exemplo.[5] Por definição, a transformada Z de $x[n]$ é dada por

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} \tag{5.1}$$

para $z \in \Omega_x$, isto é, o conjunto $z \in \mathbb{C}$ para o qual a soma acima é finita. O domínio da transformada é definido por restrições sobre o módulo de z no somatório, ao analisar a sequência $x[n]$, conforme definido por cada caso abaixo.

Caso 1: Se $x[n]$ tem duração finita, o domínio Ω_x é todo o plano complexo, exceto $z = 0$ e/ou $|z| \to \infty$.

Caso 2: Se $x[n] = 0 : n > m,\ m \in \mathbb{Z}$, o domínio (se existir) é o exterior do menor círculo que contém todos os polos.

Caso 3: Se $x[n] = 0 : n < m,\ m \in \mathbb{Z}$, o domínio (se existir) é o interior do maior círculo que não contém nenhum polo.

Como a transformada de Laplace, a transformada Z possui um conjunto importante de propriedades, a serem dominadas antes de conhecer suas aplicações. Elas estão listadas adiante.

Propriedade 1: Para $x[n] = \delta[n]$ (função impulso),

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]z^{-k} = 1, \quad \Omega_\delta = \mathbb{C} \tag{5.2}$$

Propriedade 2: Caso o limite $z \to 1$ de $\mathcal{Z}\{x[n]\}$ exista, seja finito e único, então

$$\mathcal{Z}\{x[n]\}\Big|_{z=1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k], \quad z = 1 \in \Omega_x \tag{5.3}$$

Propriedade 3: Para $x[n] = a^n u[n]$,

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{z}{z-a}, \quad \Omega_x = \{z \in \mathbb{C}, |z| > |a|\} \tag{5.4}$$

Analogamente, caso $x[n] = -a^n u[-n-1]$, logo

$$\mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{z}{z-a}, \quad \Omega_x = \{z \in \mathbb{C}, |z| < |a|\} \tag{5.5}$$

Propriedade 4: A transformada Z é linear,

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=1}^{m} a_k x_k[n]\right\} = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathcal{Z}\{x_k[n]\}, \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2} \cap ... \cap \Omega_{x_m} \tag{5.6}$$

Propriedade 5: Caso a sequência seja dada pela convolução de outras m sequências, logo

$$\mathcal{Z}\{x_1[n] * x_2[n] * ... * x_m[n]\} = \prod_{k=1}^{m} \mathcal{Z}\{x_k[n]\}, \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2} \cap ... \cap \Omega_{x_m} \tag{5.7}$$

Propriedade 6: Para $y[n] = n^m x[n] : m \in \mathbb{N}$, então,

$$\mathcal{Z}\{n^m x[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m \mathcal{Z}\{x[n]\} \tag{5.8}$$

Propriedade 7: A transformada admite atraso (deslocamento à direita), tal que

$$\mathcal{Z}\{x[n-m]u[n-m]\} = z^{-m}\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.9}$$

Analogamente, pode-se fazer o avanço (deslocamento à esquerda),

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m \left(\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\right), \quad m \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.10}$$

Propriedade 8: A transformação de uma combinatória é

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n+m}{m} a^n u[n]\right\} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N},\ |z| > |a| \tag{5.11}$$

Esta transformada também admite deslocamento, de forma que

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n}{m} a^{n-m} u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N},\ |z| > |a| \tag{5.12}$$

onde

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$

Propriedade 9: A transformada é reversível no tempo,

$$y[n] = x[-n] \Rightarrow Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^k = X(z^{-1}), \quad \Omega_y = \{z^{-1} \in \Omega_x\} \tag{5.13}$$

Propriedade 10: Considere $x[n]$ um sinal à direita de $n = 0$, isto é, $x[n] = x[n]u[n]$ com $x[0]$ finito, cuja transformada $X(z)$ possui domínio Ω_x não vazio. Então,

$$x[0] = \lim_{|z| \to \infty} X(z) \tag{5.14}$$

Também, considere $X(z)$ com domínio $|z| > \rho : 0 < \rho \leq 1$. Se o limite $m \to \infty$ de $x[m]$ for finito, consequentemente

$$\lim_{m \to \infty} x[m] = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z) \tag{5.15}$$

Propriedade 11: A transformada Z possui inversa,

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) \;\Leftrightarrow\; x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \tag{5.16}$$

a qual, no caso de frações de polinômios racionais, corresponde ao quociente da divisão pelo método de Briot-Ruffini. Se $x[n]$ for um sinal à direita, a divisão deve começar pelos termos de maior ordem. Caso $x[n]$ seja um sinal à esquerda, começa pelos termos de menor ordem.

Ainda, por tratar-se de uma manipulação de séries, é relevante relembrar como calcular algumas somas de progressões geométricas para aplicar a transformada Z. Particularmente, para $a \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{m} a^k = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a}$$

Caso $|a| < 1$, a forma acima é simplificada, quando $m \to \infty$, para

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1 - a}$$

5.2 Resumo teórico II

Com o conhecimento da definição, das manipulações algébricas e propriedades atreladas à transformada Z, faz-se necessário conhecer algumas de suas (diversas) aplicações.

Por exemplo, imagine uma sequência de eventos $x[n]$ cuja ocorrência de cada $x[n+m]$ depende apenas do evento anterior $x[n+m-1]$, de acordo com uma distribuição probabilística. Em outras palavras, sejam variáveis aleatórias discretas X_1, X_2, X_3, que ocorrem nesta ordem, tal que

$$P_{X_3|X_2,X_1}(x_3|x_2,x_1) = P_{X_3|X_2}(x_3|x_2)$$

Uma relação imediata do problema anterior (denominado cadeia de Markov) com a transformada Z seria aplicá-la para determinar métricas estatísticas relevantes da distribuição de $P_{\cdot|\cdot}(\cdot|\cdot)$, como sua esperança ou variância. A fim de fazer isto, primeiramente, são necessárias algumas definições sobre os termos a serem usados nesta aplicação, conforme listado abaixo.

Definição 1: Uma *variável aleatória* (VA) *discreta* é uma função X à qual está associada uma distribuição

$$P(X = k) = p[k] \geq 0 \quad \text{tal que} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} p[k] = 1 \tag{5.17}$$

Definição 2: A *esperança* (ou valor esperado) de uma $f(X)$ é

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k} f(k)p[k] \tag{5.18}$$

Definição 3: O *momento* de ordem m de uma VA é

$$\mathbb{E}(X^m) = \sum_{k} k^m p[k], \quad m \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.19}$$

Definição 4: A *média* estatística é o momento de primeira ordem,

$$\bar{x} = \mathbb{E}(X) = \sum_{k} kp[k] \tag{5.20}$$

Definição 5: A *variância* de uma VA é

$$\sigma^2(X) = \sum_k (k - \bar{x})^2 p[k] \tag{5.21}$$

A partir das definições são construídas as propriedades das medidas estatísticas em relação às variáveis aleatórias, sequências e a transformada Z.

Propriedade 1: A variância está relacionada ao momento por

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \tag{5.22}$$

Propriedade 2: Para um conjunto de VAs $X_1, X_2, ..., X_m$ independentes entre si, segue que

$$\mathbb{E}(f_1(X_1)f_2(X_2)...f_m(X_m)) = \prod_{k=1}^{m} \mathbb{E}(f_k(X_k)) \tag{5.23}$$

Propriedade 3: A definição da transformada (5.1) está relacionada à esperança e à probabilidade da VA assumir um valor específico, isto é,

$$G_X(z) = \mathcal{Z}\{p[n]\} = \mathbb{E}\{z^X\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k) z^k \tag{5.24}$$

Propriedade 4: A função $G_X(z)$ fica bem definida quando

$$\mathcal{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1} = G_X(1) = 1 \tag{5.25}$$

Propriedade 5: Os momentos podem ser escritos em termos do operador derivada,

$$\mathbb{E}(X^m) = \left(z\frac{d}{dz}\right)^m \mathcal{Z}\{p[n]\} = \mathcal{Z}\{n^m p[n]\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.26}$$

Analogamente, para a variância,

$$\sigma_X^2 = \left(z\frac{d}{dz}\right)^2 \mathcal{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1} - \left(z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1}\right)^2 \tag{5.27}$$

Propriedade 6: Sequências $p[n]$ a direita do zero podem ser calculadas a partir da série de Taylor,

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} G_X(z)\Big|_{z=0} z^n \Leftrightarrow p[n] = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0) \tag{5.28}$$

Propriedade 7: Sejam $X_1, X_2, ..., X_m$ VAs discretas independentes, e seja também $W = \sum_{i=1}^m a_i X_i$. Então,

$$G_W(z) = \mathbb{E}(z^W) = \prod_{i=1}^{m} G_{X_i}(z^{a_i}) \tag{5.29}$$

Ademais, se cada VA estiver relacionada a uma sequência $x_1[n], x_2[n], ..., x_m[n]$,

$$G_W(z) = \sum_k p[k] z^k \Leftrightarrow p[n] = x_1[n] * x_2[n] * ... * x_m[n] \tag{5.30}$$

5.3 Exercícios propostos

13 **PR 2s2022**

Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{-z^2 - 21z}{(z+1)(z-3)}, \quad 1 < |z| < 3$$

Solução

O primeiro passo é reescrever a equação tal que fique isolado o termo $X(z)/z$. Assim,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-z-21}{(z+1)(z-3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-3}$$

Resolvendo as frações parciais,

$$A(z-3) + B(z+1) = -z - 21$$

$$z = 3 : 4B = -24 \Rightarrow B = -6$$
$$z = -1 : -4A = -20 \Rightarrow A = 5$$

Portanto, reescrevendo $X(z)$ a partir da fração parcial encontrada,

$$X(z) = \frac{5z}{z+1} - \frac{6z}{z-3}$$

Esta forma conveniente permite escrever a sequência $x[n]$ utilizando (5.4) e (5.5),

$$X(z) = 5\mathcal{Z}\{(-1)^n u[n]\} - 6\mathcal{Z}\{-(3)^n u[-n-1]\}$$

$$\therefore \boxed{x[n] = 5(-1)^n u[n] + 6(3)^n u[-n-1]}$$

Note que o intervalo para $|z|$ definido no enunciado é essencial para saber qual propriedade usar em cada fração, uma vez que ambas dependem de um domínio Ω_x particular.

14 **PR 1s2022**

Determine o valor da soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)2^{-(n+1)}$$

Solução

Utilizando a propriedade (5.3) com $x[n] = (n+1)2^{-(n+1)}$,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (n+1)2^{-(n+1)} = \mathcal{Z}\{(n+1)2^{-(n+1)}\}\Big|_{z=1}$$

O limite inferior do somatório pode ser modificado usando uma sequência degrau, ou seja,

Solução *continuação*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(n+1)2^{-(n+1)} = \mathcal{Z}\{(n+1)2^{-(n+1)}u[n]\}\Big|_{z=1}$$

Aplica-se então a propriedade (5.6) para separar a expressão e manipulá-la,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{(n+1)2^{-(n+1)}u[n]\} &= \mathcal{Z}\left\{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n]\right\} + \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n]\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}\left\{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\right\} + \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\right\}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n]\right\} + \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\right\}\right]\end{aligned}$$

Finalmente, via (5.12) e (5.4), respectivamente,

$$\mathcal{Z}\{(n+1)2^{-(n+1)}u[n]\}\Big|_{z=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{(1/2)z}{(z-1/2)^2} + \frac{z}{z-1/2}\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1/2}{1/4} + \frac{1}{1/2}\right) = \boxed{2}$$

15 ***PR 1s2023***

Determine, para uma sequência cuja transformada Z é dada por

$$Y(z) = \frac{4z^3 + 16z^2 - 38z}{(z-1)(z+2)(z-4)}$$

(a) $y[0]$ para $\Omega_y = \{|z| > 4\}$ e (b) $y[-1]$ para $\Omega_y = \{|z| < 1\}$.

Solução

O denominador de $Y(z)$ está fatorado, mas é de interesse que ele esteja na forma polinomial. Assim sendo,

$$Y(z) = \frac{4z^3 + 16z^2 - 38z}{z^3 - 3z^2 - 6z + 8}$$

Ademais, os polos desta função estão em $p_1 = 1, p_2 = -2, p_3 = 4$, o que implica o domínio $\Omega_y = \{|z| > 4\}$ ser exterior ao menor círculo, no plano complexo, que contém todos os polos. Isto faz da sequência correspondente da função, $y[n]$, um sinal à direita de $n = 0$ de acordo com o caso 2. Por conseguinte, pode-se aplicar (5.14),

$$y[0] = \lim_{|z|\to\infty} \frac{4z^3 + 16z^2 - 38z}{z^3 - 3z^2 - 6z + 8} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{4 + 16/z - 38/z^2}{1 - 3/z - 6/z^2 + 8/z^3} = \boxed{4}$$

Analogamente, quando o domínio é $\Omega_y = \{|z| < 1\}$, ou seja, o maior círculo que não contém nenhum dos polos, tem-se um sinal à esquerda. Portanto, a forma viável de calcular a sequência é pela divisão de polinômios pelo método de Briot-Ruffini. Porém, ao invés de fazer todo o processo, note que interessa apenas o primeiro termo, $y[-1]$, o que simplifica a divisão para os menores termos de cada polinômio, via (5.16)! Assim,

$$y[n] = y[-1]z + y[-2]z^2 + \ldots \Rightarrow y[-1]z = \frac{-38z}{8} \therefore y[-1] = -\frac{38}{8} = \boxed{-\frac{19}{4}}$$

16 **PR 2s2023**

A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta é

$$\mathbb{E}(z^X) = \sum_k z^k P(X=k) = \frac{2z+z^2}{3(2-z)^3}, \quad |z|<2$$

Calcule (a) $P(X=1)$ e (b) a média $\mathbb{E}(X) = \sum kP(X=k)$.

Solução

Usando as equações (5.17), (5.24) e (5.28),

$$\mathbb{E}(z^X) = G_X(z) \Leftrightarrow P(X=1) = p[1] = G_X^{(1)}(0) = \frac{d}{dz}\left(\frac{2z+z^2}{3(2-z)^3}\right)\Big|_{z=0}$$

$$\therefore P(X=1) = \left(\frac{3(2-z)^3(2+2z) - 9(2-z)^2(-1)(2z+z^2)}{9(2-z)^6}\right)\Big|_{z=0} = \frac{3(2)^4}{9(2)^6} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

Por sua vez, via (5.26) com $m=1$,

$$\mathbb{E}(X) = z\frac{d}{dz}\left(\frac{2z+z^2}{3(2-z)^3}\right)\Big|_{z=1} = \left(\frac{3z(2-z)^3(2+2z) - 9z(2-z)^2(-1)(2z+z^2)}{9(2-z)^6}\right)\Big|_{z=1}$$

Note que não houve necessidade de calcular a derivada novamente, apenas multiplicar o resultado obtido anteriormente por z. Avaliando-o em $z=1$,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3(4)+9(3)}{9} = \boxed{\frac{13}{3}}$$

5.4 Algoritmos de resolução

Exercício 13

Dados: Transformada $X(z)$ e o intervalo de $|z|$.
Objetivo: Determinar a sequencia $x[n]$ correspondente.

1. Reescrever a função fornecida, isolando o termo $X(s)/s$.
2. Expandir em frações parciais e resolvê-las, isolando $X(s)$ ao final.
3. Utilizar a propriedade adequada para escrever a sequência de cada termo, prestando atenção no intervalo de $|z|$ determinado no enunciado.

Exercício 14

Dados: Somatório de uma função a^n.
Objetivo: Determinar o valor da soma.

1. Utilizar (5.3) para relacionar a soma a uma $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ (usando degrau, se for o caso).
2. Manipular a expressão até uma forma conveniente para aplicar as propriedades correspondentes, e resolvê-las.

Exercício 15

Dados: Transformada $Y(z)$ de uma sequência.
Objetivo: Determinar (a) valor inicial $y[0]$ em Ω_{y_a} e (b) valor específico $y[k]$ em Ω_{y_b}.

1. Determinar os polos da função transformada e identificar os de maior e menor módulo.

2. Caso sejam aplicáveis, utilizar os teoremas do valor inicial (5.14) e final (5.15).

3. Caso os teoremas não sejam aplicáveis, fazer a divisão polinomial via Briot-Ruffini. Neste caso, é importante buscar possíveis simplificações (calcular apenas o termo de menor ordem, por exemplo).

Exercício 16

Dados: Transformada Z de uma distribuição de probabilidade da VA X.
Objetivo: Determinar $P(X = 1)$ e $\mathbb{E}(X)$.

1. Para encontrar $P(X = 1)$, basta calcular a derivada da transformada e avaliá-la em $z = 0$.

2. Para $\mathbb{E}(X)$, basta multiplicar a derivada encontrada anteriormente por z e avaliar o resultado em $z = 1$.

6 Equações a diferenças

6.1 Resumo teórico

No capítulo anterior, foi estabelecida uma relação entre sequências, provenientes de um domínio discreto no tempo, e sua representação em outro domínio z através da transformada Z. Todavia, ainda há de ser explorado o equacionamento destas sequências e como manipular estas equações, o que será feito a seguir, através de *equações a diferenças*.

Em particular, estas equações devem ser lineares e com coeficientes constantes, ou seja, da forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n+k] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n+j] \tag{6.1}$$

Estas podem ser resolvidas utilizando a transformada Z, utilizando as mesmas propriedades vistas anteriormente, em particular (5.10), (5.11) e (5.12). A forma de aplicá-las será mostrada com mais detalhe ao longo da resolução de exercícios.

Concentra-se agora na aplicação do *método dos coeficientes a determinar* para sequências discretas. Como um paralelo do método para o domínio contínuo, são utilizadas as propriedades abaixo.

Propriedade 1: Um conjunto se sinais $y = \{y_k[n], k = 1, 2, ..., m\}$ é linearmente independente (LI) se, e somente se

$$\sum_{k=1}^{m} c_k y_k[n] = 0,\ \forall n \ \Leftrightarrow\ c_k = 0,\ k = 1, 2, ..., m \tag{6.2}$$

Por conseguinte, $y_1[n] = \lambda_1^n, y_2[n] = \lambda_2^n$ são LI apenas quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Propriedade 2: As funções $y_1[n] = \lambda^n, y_2[n] = y_1[n+k]$ são linearmente dependentes.

Propriedade 3: A sequência $y[n]$ é solução da equação homogênea

$$D(p)y[n] = \left(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k\right) y[n] = 0 \tag{6.3}$$

se, e somente se, $D(\lambda) = 0$, ou seja, se λ for raiz desta, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esta solução é de ordem m, e dada pela combinação linear de seus m modos próprios.

Nesta propriedade em particular, destaca-se que as raízes definem os modos próprios da solução e, a depender do tipo de raiz, a solução desses modos é diferente. Elas seguem os casos adiante.

Caso 1: Raízes distintas, $\lambda_{k_i} \neq \lambda_{k_j}$ para todo $i \neq j$, os modos próprios são $\lambda_k^n, k = 1, 2, ..., m$.

$$y[n] = \sum_{k=1}^{m} A_k \lambda_k^n \tag{6.4}$$

Caso 2: Raízes repetidas, $\lambda_i = \lambda_j$ em um conjunto $i \neq j$ com multiplicidade r (ou seja, os λ são iguais r vezes), os modos próprios são $\lambda^n, ..., n^{r-1}\lambda^n$.

$$y[n] = \sum_{k=1}^{r} A_k n^{k-1} \lambda^n \tag{6.5}$$

Propriedade 4: Uma equação não homogênea

$$D(p)y[n] = N(p)x[n], \quad \text{onde} \quad D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k, N(p) = \sum_{k=0}^{l} \beta_k p^k \tag{6.6}$$

tal que $\alpha_m = 1$, pode ser resolvida sempre que $x[n]$ for solução de uma equação a diferenças homogênea da forma

$$\bar{D}(p)x[n] = 0 \tag{6.7}$$

onde $\bar{D}(p)$ contém os modos forçados da solução.

Propriedade 5: A solução forçada de uma equação não homogênea pode ser encontrada através da solução de

$$D(p)y_f[n] = N(p)x[n] \Leftrightarrow \bar{D}(p)D(p)y_f[n] = 0 \tag{6.8}$$

cujas raízes são as que resolvem $\bar{D}(\gamma) = 0$. Considerando que há $\bar{m}$ modos forçados, com suas respectivas multiplicidades (como nos casos 1 e 2 das raízes da solução homogênea), então $g_k[n]$ é a sequência que os representa. Assim sendo, a solução fica da forma

$$y_f[n] = \sum_{k=1}^{\bar{m}} b_k g_k[n] \tag{6.9}$$

Assim como o resumo teórico do método dos coeficientes a determinar se assemelha, no caso discreto, ao caso contínuo (visto no capítulo 3), os exercícios também utilizam conceitos análogos. Isto será evidenciado a seguir.

6.2 Exercícios propostos

17 ***PR 1s2022***

Determine
(a) A função de transferência do sistema $y[n+1] - 5y[n] = x[n+1]$
(b) A solução forçada para a entrada $x[n] = j + (j)^n$

Solução

O processo para determinar a função de transferência é simples, reescrevendo o sistema através do operador derivada,

$$(z-5)Y(z) = zX(z) \Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{z}{z-5}}$$

Esta permite calcular a solução forçada para uma entrada da forma $x[n] = \sum_{k=0}^{n} a_k (z_k)^n$ como a soma

$$y_f[n] = \sum_{k=0}^{n} a_k H(z_k)(z_k)^n$$

No caso desse exercício, nota-se que $x[n] = j(1)^n + (j)^n$ e, portanto,

$$y_f[n] = jH(1) + H(j)(j)^n = \boxed{-\frac{j}{4} + \frac{j}{j-5}(j)^n}$$

18 *PR 1s2022*

(a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] + y[n+1] - 6y[n] = 4x[n+2] - 17x[n+1] - 12x[n]$$

(b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

Solução

Dada a equação a diferenças, faz-se a transformada Z termo a termo, a fim de encontrar a função de transferência,

$$(p^2 + p - 6)y[n] = (4p^2 - 17p - 12)x[n] \;\Rightarrow\; \boxed{H(z) = \frac{4z^2 - 17z - 12}{z^2 + z - 6}}$$

O denominador é reescrito, visando isolar a fração $H(z)/z$ e, em seguida, reescrever a expressão em termos de frações parciais,

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{4z^2 - 17z - 12}{z(z-2)(z+3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z+3}$$

Resolvendo a expressão acima, a fim de encontrar uma forma conveniente,

$$A(z-2)(z+3) + Bz(z+3) + Cz(z-2) = 4z^2 - 17z - 12$$

$$\begin{gathered} z = 0 : -6A = -12 \;\Rightarrow\; A = 2 \\ z = 2 : 10B = -30 \;\Rightarrow\; B = -3 \\ z = -3 : 15C = 75 \;\Rightarrow\; C = 5 \end{gathered}$$

Substituindo na expressão original e isolando a função de transferência,

$$H(z) = 2 - \frac{3z}{z-2} + \frac{5z}{z+3}$$

Finalmente, via (5.2) e (5.4),

$$\boxed{h[n] = 2\delta[n] + (-3(2)^n + 5(-3)^n)u[n]}$$

19 *PR 2s2023*

(a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$, a solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] + y[n+1] + 4y[n] = 0, \quad y[0], y[1] \text{ dados}$$

(b) Determine $y[n]$ para $y[0] = 5, y[1] = -4$.

Solução

A partir da equação a diferenças, multiplica-se ambos os lados por $u[n]$ para encontrar a sequência desejada; em seguida faz-se uso da propriedade (5.10),

$$y[n+2]u[n] + 4y[n+1]u[n] + 4y[n] = 0$$

$$\left(z^2Y(z) - z^2\left(y[0] + \frac{1}{z}y[1]\right)\right) + 4\left(zY(z) - zy[0]\right) + 4Y(z) = 0 \ \therefore \ \boxed{Y(z) = \frac{z^2y[0] + zy[1] + 4zy[0]}{z^2 + 4z + 4}}$$

Como feito anteriormente, esta equação pode ser reescrita utilizando frações parciais até chegar em um formato conveniente. Para tanto, usa-se os valores $y[0] = 5, y[1] = -4$,

$$Y(z) = \frac{5z^2 - 4z + 20z}{(z+2)^2} \ \therefore \ \frac{Y(z)}{z}\frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{(z+2)^2}$$

$$A(z+2)^2 + Bz(z+2) + Cz = 5z^2 + 16z$$

$$z = 0 : A = 0$$

$$z = -2 : -2C = -12 \ \Rightarrow \ C = 6$$

$$z = 1 : 3B + C = 21 \ \Rightarrow \ B = 5$$

Finalmente, via (5.4) e (5.12),

$$Y(z) = \frac{5z}{2} + \frac{6z}{(z+2)^2} \ \Rightarrow \ \boxed{y[n] = (5(-2)^2 + 6n(-2)^{n-1})u[n]}$$

20 ***PR 1s2023***

(a) Determine a solução forçada para

$$y[n+1] + 2y[n] = 10(-2)^n$$

(b) Determine a solução para $y[0] = 5$.

Solução

Note que a solução está na forma $D(p)y[n] = x[n]$,

$$(p+2)y[n] = 10(-2)^n$$

Uma equação na forma $x[n] = ab^n$ pode ser generalizada como $x[n+m] = b^m(ab^n)$. Logo,

$$(p+2)x[n] = x[n+1] + 2x[n] = (-2)\left(10(-2)^n\right) + 20\left(10(-2)^n\right) = 0$$

$$\therefore \ \bar{D}(p) = p + 2$$

Com conhecimento do polinômio aniquilador, segue que $\bar{D}(p)D(p)$ possui apenas $\bar{m} = 1$ modo forçado (no caso, $\gamma = -2$), com multiplicidade 2, o que implica

$$g_k[n] = n(\gamma)^n \ \therefore \ y_f[n] = bn(-2)^n$$

Pela equação (6.8), é imperativo que a solução forçada siga a equação original, ou seja,

$$(p+2)\left(bn(-2)^n\right) = b(n+1)(-2)^{n+1} + 2bn(-2)^n = 10(-2)^n$$

Solução *continuação*

Por conseguinte,

$$b = 5 \;\therefore\; \boxed{y_f[n] = 5n(-2)^n}$$

O próximo passo após conhecer a solução forçada é determinar a solução homogênea, para assim conseguir a solução completa. Isso é feito retomando a equação original, fazendo-a homogênea,

$$y[n+1] + 2y[n] = 0 \;\therefore\; (zY(z) - zy_h[0]) + 2Y(z) = 0 \;\Rightarrow\; Y(z) = y_h[0]\frac{z}{z+2}$$

Via (5.4), a transformada inversa fica na forma

$$y_h[n] = y_h[0](-2)^n u[n] = y_h[0](-2)^n$$

O valor $y_h[0]$ ainda não é conhecido, mas $y[0]$ (do enunciado) e $y_f[0]$ (calculado anteriormente) são. Como eles devem formar, obrigatoriamente, uma combinação linear, deduz-se

$$y_h[0] = y[0] - y_f[0] = 5 - 0 = 5 \;\Rightarrow\; y_h[n] = 5(-2)^n$$

Finalmente,

$$\boxed{y[n] = y_f[n] + y_h[n] = -5n(-2)^n + 5(-2)^n}$$

21 ***PR 1s2023***

Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (1 + n + n^2)(-2)^n$$

Solução

O primeiro passo é expandir a equação e escrever a função de transferência correspondente,

$$y[n] = 1(-2)^n + n(-2)^n + n^2(-2)^n \;\Rightarrow\; Y(z) = \frac{z}{z+2} - \frac{2z}{(z+2)^2} + \frac{-2z^2+4z}{(z+2)^3}$$

usando as propriedades (5.4) e (5.12). Ela será usada adiante para calcular a solução final. Porém a partir da forma expandida é que se pode deduzir um polinômio aniquilador. Visto que $y[n]$ é de grau $N = 2$, então a solução candidata deve ter grau $N + 1 = 3$, isto é,

$$\bar{D}(p) = p^3 + Ap^2 + Bp + C \quad \text{tal que} \quad \bar{D}(p)y[n] = 0$$

Usando novamente o fato que $y[n] = ab^n$ implica $y[n+m] = b^m(ab^n)$,

$$\begin{aligned}\bar{D}(p)y[n] = (1 + (n+3) + (n+3)^2)(-2)^{n+3} + A(1 + (n+2) + (n+2)^2)(-2)^{n+2} +\\ + B(1 + (n+1) + (n+1)^2)(-2)^{n+1} + C(1 + n + n^2)(-2)^n = 0\end{aligned}$$

Dividindo toda a expressão por $(-2)^n$ e abrindo os termos,

$$(n^2 + 7n + 13)(-2)^3 + A(n^2 + 5n + 7)(-2)^2 + B(n^2 + 3n + 3)(-2) + C(n^2 + n + 1) = 0$$

Solução *continuação*

Isolando os termos de cada potência de n,

$$(-8+4A-2B+C)n^2+(-56+20A-6B+C)n+(-104+28A-6B+C)=0$$

Para que a expressão fique nula, será imposto que todos os termos também sejam, tal que

$$\begin{aligned}4A-2B+C&=8\\20A-6B+C&=56\\28A-6B+C&=104\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear acima, obtém-se $A=6, B=12, C=8$ e, portanto,

$$\bar{D}(p)=p^3+6p^2+12p+8=(p+2)^3$$

Ufa. Após esta manipulação, pode-se escrever a expressão de $\bar{D}(p)y[n]$ utilizando a equação (5.10), e em seguida isolar a função de transferência,

$$\left(z^3-z^3y[0]-z^2y[1]-zy[2]\right)+6\left(z^2Y(z)-z^2y[0]-zy[1]\right)+12\left(zY(z)-zy[0]\right)+8Y(z)=0$$

$$\therefore\ Y(z)=\frac{y[0]z^3+(y[1]+6y[0])z^2+(y[2]+6y[1]+12y[0])z}{z^3+6z^2+12z+8}$$

Comparando com a função de transferência originalmente utilizada – a qual possui o mesmo denominador – é construído um sistema linear para uma nova solução,

$$Y(z)=\frac{z^3+4z}{(z+2)^3}\ \Rightarrow\ \begin{cases}y[0]=1\\y[1]+6y[0]=0\\y[2]+6y[1]+12y[0]=4\end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, finalmente encontra-se uma realização

$$\boxed{(p^3+6p^2+12p+8)y[n]=0\quad\text{tal que}\quad y[0]=1, y[1]=-6, y[2]=28}$$

6.3 Algoritmos de resolução

Exercicio 17

Dados: Equação a diferenças $f(y[n])=g(x[n])$ e uma entrada $x[n]$.
Objetivo: Encontrar a função de transferência e a solução forçada para a entrada $x[n]$.

1. Reescrever o sistema e calcular a função de transferência $H(s)$ por definição.
2. Escrever a forma geral da solução forçada e compará-la com a entrada fornecida.
3. Calcular a solução forçada.

Exercicio 18

Dados: Equação a diferenças $f(y[n])=g(x[n])$.
Objetivo: Determinar a função de transferência $H(z)$ e sua anti-transformada, $h[n]$.

1. Reescrever os sistema e calcular a função de transferência $H(z)$ por definição.
2. Isolar o termo $H(z)/z$ e reescrever a função resultante em frações parciais.
3. Multiplicar a igualdade por z para obter $H(z)$ em um formato conveniente.
4. Aplicar a propriedade equivalente para encontrar $h[n]$.

Exercicio 19

Dados: Equação a diferenças homogênea $f(y[n]) = 0$ e condições iniciais.
Objetivo: Determinar a transformada Z de $y[n]u[n]$ e a solução geral $y[n]$.

1. Multiplicar, se necessário, ambos os lados da igualdade pela função degrau.
2. Aplicar as propriedades correspondentes, no domínio transformado, para achar $Y(z)$.
3. Reescrevê-la por meio de frações parciais, até chegar em uma forma conveniente.
4. Aplicar as propriedades correspondentes para obter $y[n]$.

Exercicio 20

Dados: Equação a diferenças $f(y[n]) = g(n)$ e condições iniciais.
Objetivo: Determinar a solução forçada $y_f[n]$ e a geral, $y[n]$.

1. Escrever a saída de forma generalizada, a fim de encontrar o polinômio aniquilador.
2. Determinar a quantidade, o valor e a multiplicidade dos modos forçados associados.
3. Encontrar os valores das constantes da forma geral.
4. Calcular $y_f[n]$ com as informações anteriores.
5. Retomar a equação original, igualando-a a zero, para encontrar um termo com $y_h[0]$.
6. Usar $y[n] = y_f[n] + y_h[n]$ para isolar a solução homogênea.

Exercicio 21

Dados: Sequência $y[n] = f(n)$.
Objetivo: Determinar a equação a diferenças homogênea e as condições iniciais.

1. Reescrever a sequência de forma explícita e encontrar a função de transferência $Y(z)$.
2. Encontrar o polinômio aniquilador $\bar{D}(p)$ a partir da forma explícita, primeiro escrevendo-o de forma genérica e manipulando a equação para encontrar os valores das constantes.
3. Escrever $\bar{D}(p)y[n]$ e isolar uma nova função de transferência.
4. Comparar a nova função com a original e montar um sistema de equações que permita calcular todas as condições iniciais.

7 Variáveis de estado

7.1 Resumo teórico

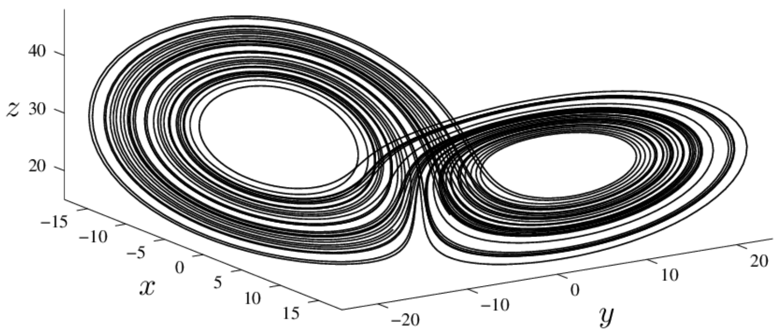
Os sistemas estudados nesta disciplina foram, até então, introduzidos por meio de equações cuja resolução visava mostrar algum tipo de relação entre entrada e saída. Apesar de interessante e importante, esta abordagem pode ser limitada quando trata-se de casos mais complexos, especificamente nos quais as equações possuem dependência mútua.

Neste contexto, uma nova abordagem há de ser usada: as *variáveis de estado* (ou internas). Através delas, sistemas de entrada $x(t)$ e saída $y(t)$ únicas (*single-input single-output*, SISO) podem ser descritos por sistemas de equações de primeira ordem do tipo

$$\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t), \quad y(t) = g(v(t), x(t), t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

de forma que o vetor de variáveis de estado $v(t)$ – composto pelas soluções da equação acima – é univocamente determinado a partir da condição inicial $v(0)$ e entrada $x(t)$. Em outras palavras, dada uma entrada e suas condições iniciais, elas têm como solução única uma trajetória em $\mathbb{R}^m$.

Por se tratar de um espaço m-dimensional, a representação das trajetórias não é intuitiva. Todavia, uma simplificação intuitiva pode ser adotada: representar graficamente duas (ou três) das componentes do vetor $v(t) = [v_1(t), v_2(t), ..., v_m(t)]$. Isso é feito em um *espaço de fases*, no qual os eixos correspondem às componentes, e o tempo fica parametrizado, conforme o exemplo abaixo.



Espaço de fases em um sistema caótico, denominado atrator de Lorenz.[6]

Uma aplicação curiosa desse fenômeno é vista em um pêndulo magnético, por exemplo.

Em um sistema dinâmico, a solução pode ter valores para os quais é fixa (não depende do tempo), nos chamados *pontos de equilíbrio*. Formalmente,

$$f(\bar{v}, \bar{x}) = 0 \tag{7.2}$$

Via de regra, N equações, cada qual de ordem M, possuem M pontos de equilíbrio em $\mathbb{R}^N$. Para saber como o sistema se comporta em torno deste ponto, escreve-se

$$\dot{v} = Av + Bx \qquad y = Cv + Dx \tag{7.3}$$

onde A, B, C, D são os jacobianos

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Big|_{\bar{v},\bar{x}} \quad B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Big|_{\bar{v},\bar{x}} \quad C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Big|_{\bar{v},\bar{x}} \quad D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Big|_{\bar{v},\bar{x}} \tag{7.4}$$

A partir de uma aproximação linear dos jacobianos A e B, o comportamento do sistema pode ser classificado de três formas: assintoticamente estável, instável ou indeterminado.

1. Se os autovalores λ_A tiverem parte real negativa, o sistema é assintoticamente estável.
2. Se os autovalores λ_A tiverem parte real positiva, o sistema é instável.
3. Se os autovalores λ_A tiverem parte real nula, o sistema é indeterminado.

Com o conhecimento de variáveis de estado e sistemas dinâmicos acima, pode-se descrever algumas de suas propriedades e características de suas soluções.

Propriedade 1: As trajetórias jamais se cruzam no espaço de fases, pois o sistema não pode evoluir diferentemente a partir de um mesmo ponto, isto é, qualquer ponto está em um caminho único.

Propriedade 2: Considere a equação diferencial $D(p)y(t) = \beta_0 x(t)$, como visto em (3.13). Seja

$$D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \tag{7.5}$$

Segue que, em notação matricial,

$$\dot{v} = Av + bx = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} x \tag{7.6}$$

$$y = cv + dx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} x \tag{7.7}$$

Propriedade 3: Considere agora a equação diferencial $D(p)y(t) = N(p)x(t)$, onde o grau de $D(p)$ é igual ao de $N(p)$. Sejam

$$D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \qquad N(p) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k p^k \tag{7.8}$$

Segue que, em notação matricial,

$$\dot{v} = Av + bx = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \tag{7.9}$$

$$y = cv + dx = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 & \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \cdots & \bar{\beta}_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \beta_m \end{bmatrix} x \tag{7.10}$$

onde

$$\bar{\beta}_j = \beta_j - \beta_m \alpha_j \tag{7.11}$$

Propriedade 4: A solução das variáveis de estado de um sistema SISO (7.3) possui forma fechada,

$$y = \left[c(pI - A)^{-1}b + d\right] x = \frac{N(p)}{D(p)} x \tag{7.12}$$

Propriedade 5: A representação de estado (A, b, c, d) produz a mesma equação diferencial que sua representação dual de estado (A', c', b', d), de forma que

$$(c(pI - A)^{-1}b + d)' = (b'(pI - A')^{-1}c' + d) = \frac{N(p)}{D(p)} \tag{7.13}$$

Os conceitos explorados anteriormente podem parecer abstratos à primeira vista. Portanto, fazer alguns exercícios é ideal para explorá-los de forma mais palatável.

7.2 Exercícios propostos

22

PR 1s2023

(a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$,

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= (v_1 + 1)(v_2 - 3) - 5x = v_1 v_2 - 3v_1 + v_2 - 3 - 5x \\ \dot{v}_2 &= (v_1 - 3)(v_2 + 1) + 2x^2 = v_1 v_2 - 3v_2 + v_1 - 3 + 2x^2\end{aligned}$$

(b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A, B) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx \quad v \in \mathbb{R}$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear.

Solução

Como o objetivo é encontrar os pontos de equilíbrio do sistema, utiliza-se a equação (7.2), tal que $\dot{v}_1 = \dot{v}_2 = 0$ simultaneamente. Isto ocorre, para $x = 0$, quando

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 = 0 &\Leftrightarrow \bar{v}_1 = -1, \bar{v}_2 = 3 \\ \dot{v}_2 = 0 &\Leftrightarrow \bar{v}_1 = 3, \bar{v}_2 = -1\end{aligned}$$

Portanto, os pontos possíveis são $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = (-1, -1)$ ou $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = (3, 3)$.
A partir das equações dos jacobianos mostradas em (7.4), escreve-se

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix}\partial\dot{v}_1/\partial v_1 & \partial\dot{v}_1/\partial v_2 \\ \partial\dot{v}_2/\partial v_1 & \partial\dot{v}_2/\partial v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_2 - 3 & v_1 + 1 \\ v_2 + 1 & v_1 - 3\end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix}\partial\dot{v}_1/\partial x \\ \partial\dot{v}_2/\partial x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 \\ 4x\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{v} = \begin{bmatrix}v_2 - 3 & v_1 + 1 \\ v_2 + 1 & v_1 - 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-5 \\ 4x\end{bmatrix}$$

No primeiro ponto, $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = (-1, -1)$, logo

$$\dot{v} = \begin{bmatrix}-4 & 0 \\ 0 & -4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-5 \\ 0\end{bmatrix}$$

Solução *continuação*

Calcula-se em seguida os autovalores da matriz A,

$$\det(A - \lambda_A I) = 0 \Leftrightarrow (-4 - \lambda_A)^2 = 0 \;\therefore\; \boxed{\lambda_{A,1} = \lambda_{A,2} = -4}$$

Como ambos possuem parte real negativa, o primeiro ponto é dito assintoticamente estável. Partindo para o segundo ponto, $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = (3, 3)$,

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda_A I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 16 = 0 \;\therefore\; \boxed{\lambda_{A,1} = 4, \lambda_{A,2} = -4}$$

Como um dos autovalores possui parte real positiva, o ponto é dito instável.

23 ***PR 1s2023***

Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\ddot{\ddot{y}} - 7\,\dddot{y} + 5\ddot{y} - 4\dot{y} + 2y = -2\,\ddot{\ddot{x}} + 2\,\dddot{x} - \ddot{x} + 2\dot{x} - x$$

Solução

O primeiro passo é reescrever cada lado da equação no enunciado com o operador derivada,

$$\begin{aligned} D(p) &= \alpha_4 p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p^1 + \alpha_0 p^0 = p^4 - 7p^3 + 5p^2 - 4p + 2 \\ N(p) &= \beta_4 p^4 + \beta_3 p^3 + \beta_2 p^2 + \beta_1 p^1 + \beta_0 p^0 = -2p^4 + 2p^3 - p^2 + 2p - 1 \end{aligned}$$

Isto é uma forma conveniente de escrever α, β nas equações tal que elas sigam o formato descrito em (7.9) e (7.10). De acordo com estas, fica trivial perceber que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Especificamente para c, deve-se calcular os valores $\bar{\beta}_j$ de acordo com (7.11),

$$\bar{\beta}_0 = \beta_0 - \beta_4\alpha_0 = 3 \quad \cdots \quad \bar{\beta}_3 = \beta_3 - \beta_4\alpha_3 = -12$$

Finalmente,

$$c = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 & \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \bar{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & -12 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

7.3 Algoritmos de resolução

Exercício 22

Dados: Sistema de EDOs em termos de v_1, v_2.
Objetivo: Encontrar os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ e avaliá-los em termos de estabilidade.

1. Garantir que $\dot{v}_1$ e $\dot{v}_2$ estão escritos na forma

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= (v_1 + a)(v_2 + b)\\ \dot{v}_2 &= (v_2 + c)(v_1 + d)\end{aligned}$$

   e escolher os valores de v_1, v_2 tal que $\dot{v}_1 = \dot{v}_2 = 0$ simultaneamente, ou seja,

$$(-a, -c) \quad (-b, -d)$$

2. A partir do sistema de equações, calcular os jacobianos A, B via (7.4), e escrever $\dot{v}$ em termos de ambos.
3. Determinar $\dot{v}$ nos pontos de equilíbrio.
4. Para cada caso, calcular os autovalores da matriz A usando $\det(A - \lambda_A I) = 0$.
5. Classificar o sistema de acordo com a estabilidade, a depender do sinal dos autovalores.

Exercício 23

Dados: Equação diferencial do tipo $D(p)y(t) = N(p)x(t)$.
Objetivo: Determinar uma realização (A, b, c, d) correspondente.

1. Escrever explicitamente os termos $D(p)$ e $N(p)$, caso a equação não esteja nesta forma.
2. Relacionar as expressões acima às respectivas definições, em (7.8).
3. Calcular os parâmetros utilizando (7.9), (7.10) e (7.11).

Neste tipo de exercício, pode também ser imposta uma forma da matrizes b ou c no enunciado, o que poderia obrigar a resolução do passo 3 a seguir (7.5), (7.6) e (7.7). Caso nada seja especificado, fica a critério do aluno escolher qual o melhor método.

8 Resolução de equações de estado

8.1 Resumo teórico

Ao longo do capítulo anterior, houve uma discussão sobre variáveis de estado e algumas propriedades de sistemas descritos por elas. O foco principal foi a determinação de pontos de equilíbrio e realizações de um sistema dinâmico. Porém, as variáveis de estado permitem a descrição de muitos outros parâmetros relevantes, a serem explorados neste capítulo pelas equações de estado.

Para tanto, considere equações homogêneas, da forma

$$\dot{v} = Av, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$$

Caso o sistema de equações montado através da matriz seja triangular (esteja perfeitamente escalonado) então as equações podem ser resolvidas de forma recorrente, componente a componente. Admitindo que este seja o caso, pode-ser determinar a equação polinomial de grau n

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 \tag{8.1}$$

onde λ é raiz da equação característica de A e, portanto, um autovalor desta matriz.

Com algum trabalho matemático, aqui omitido, pode-se chegar a uma solução geral para a função $v(t)$ da solução homogênea, dada por

$$v(t) = \exp(At)v_0 = \mathcal{L}\{(sI - A)^{-1}v(0)\} \tag{8.2}$$

Observe que esta solução envolve algo inconvencional: uma matriz como expoente de uma função. Será que isso faz sentido? Isto pode soar estranho porque, pela definição comum de exponencial, não há nexo em multiplicar uma base por si mesma A vezes. Na verdade, esta notação representa a expansão em série de Taylor da exponencial,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = 1 + At + A^2\left(\frac{t^2}{2}\right) + A^3\left(\frac{t^3}{6}\right) + \cdots$$

Uma explicação mais completa – e visual – pode ser encontrada neste trabalho do 3Blue1Brown. Porém, pode-se notar que conhecer propriedades deste tipo de solução, para além de sua intuição, é essencial. A seguir, estão algumas delas.

Propriedade 1: A derivada da exponencial de uma matriz é comutativa,

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At) = \exp(At)A \tag{8.3}$$

Propriedade 2: A matriz $\exp(At)$ é não-singular para quaisquer A, t, com inversa dada por

$$\exp(At)^{-1} = \exp(-At) \tag{8.4}$$

Propriedade 3: Toda matriz A satisfaz sua equação característica, isto é,

$$\det(\lambda I - A) = \Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = 0 \tag{8.5}$$

Esta propriedade é conhecida como Teorema de Cayley-Hamilton. Uma consequência deste é que, para uma equação matricial da forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k A^k = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_0 I = 0$$

a solução é uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

Propriedade 4: Se λ é raiz da equação característica (8.1), então

$$\exp(\lambda t) = r(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t)\lambda^k \tag{8.7}$$

Analogamente, considerando a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e sua equação característica, segue que

$$\exp(At) = r(A, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t) A^k \tag{8.8}$$

Propriedade 5: Para uma matriz diagonal $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, tem-se

$$\exp(\Lambda t) = diag(\exp(\lambda_1 t), \cdots, \exp(\lambda_n t)) \tag{8.9}$$

Para além da resolução de exponenciais de matrizes, a maioria das outras operações básicas com matrizes é bem conhecida: soma, subtração e multiplicação. A divisão, porém, não pode ser feita de maneira direta. Para contornar este problema, é realizada uma operação de *inversão* em matrizes, ou seja, encontrar a inversa A^{-1} a partir de A. Essa operação segue algumas condições de existência, definidas abaixo.

Definição 1: Uma matriz A é dita *inversível* (invertível ou não-singular) se, e somente se, for quadrada e tiver $\det(A) \neq 0$. Se isto acontecer, então $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Definição 2: Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ quadrada, o *cofator* relacionado ao elemento a_{ij} é

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

onde M_{ij} é o determinante da matriz obtida eliminando a linha i e a coluna j de A. O conjunto dos cofatores de uma matriz definem sua *matriz de cofatores* $\mathrm{cof}(A) = (c_{ij})$, que é única.

Definição 3: Se existir, a inversa da matriz A possui forma fechada, dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A) \quad \text{onde} \quad \mathrm{adj}(A) = \mathrm{cof}(A)^{\mathrm{T}}. \tag{8.10}$$

onde $\mathrm{adj}(A)$ é chamada *matriz adjunta*. Um caso bastante utilizado é o da matriz 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{8.11}$$

Definição 4: Duas matrizes A, B são ditas similares (ou conjugadas) se existir uma matriz P não-singular tal que $A = P^{-1}BP$.

A partir desta última definição, fica claro que A e B são a mesma matriz, representada em bases diferentes, cuja relação de transformação é dada por P. Conhecendo esta maneira de converter bases, é natural se perguntar: existe uma base que seja particularmente conveniente – que sempre satisfaça às propriedades normalmente desejadas (de ser inversível, diagonalizável, etc.) e também possa ser usada para resolver equações de estado?

Uma candidata muito forte como resposta é a *forma de Jordan* de uma matriz, composta por um conjunto de *blocos de Jordan*. Por definição, um bloco de Jordan de ordem k é uma matriz quadrada triangular superior de dimensão k, denotada $\mathcal{J}\{\lambda\}_k$, preenchida com seu único autovalor na diagonal principal e 1's na primeira subdiagonal superior [7]. De forma geral,

$$\mathcal{J}_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Naturalmente, os blocos de Jordan possuem uma série de propriedades próprias, mostradas a seguir.

Propriedade 1: Seja um bloco de ordem k e uma função $f(\lambda)$ diferenciável $k-1$ vezes. Então,

$$f(\mathcal{J}_k) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \ddot{f}(\lambda)/2! & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

onde $\lambda = \sigma$, sendo σ o autovalor do bloco de Jordan.

Propriedade 2: As matrizes

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4} \tag{8.13}$$

são similares, ou seja, estão em sua forma modal, pois seus autovalores são iguais.

Propriedade 3: Qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pode ser colocada na forma de Jordan por meio de uma transformação de similaridade, isto é, uma mudança de variáveis $\dot{v} = Av = (T\hat{A}T^{-1})v$.

O procedimento de obtenção dessa forma de Jordan é baseado na dimensão dos espaços nulos de $M_\lambda = A - \lambda I$, denotados por

$$v(M_\lambda) = n - rank(M_\lambda) \tag{8.14}$$

e segue os passos abaixo:

(a) Computar $M_\lambda = (A - \lambda I)$ e sua dimensão r_λ do espaço nulo, para cada valor λ com multiplicidade algébrica n_λ.

(b) Determinar o menor valor de k tal que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$ para todo $k \geq k_\lambda$.

(c) Calcular o número de blocos de dimensão $1 \leq d \leq k_\lambda$ como

$$d = 2\nu(M_\lambda^d) - \nu(M_\lambda^{d-1}) - \nu(M_\lambda^{d+1})$$

A forma de Jordan é a matriz diagonal composta pelos blocos de Jordan de cada autovalor,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\{\lambda_A\}_k = \hat{A} = diag\left(\mathcal{J}\{\lambda_1\}_{j_1}, \mathcal{J}\{\lambda_2\}_{j_2}, \cdots, \mathcal{J}\{\lambda_n\}_{j_n}\right) = \\ = \begin{bmatrix} \mathcal{J}\{\lambda_1\}_{j_1} & & & & \\ & \mathcal{J}\{\lambda_2\}_{j_2} & & & \\ & & \mathcal{J}\{\lambda_3\}_{j_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathcal{J}\{\lambda_n\}_{j_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.15}$$

onde $k = j_1 + j_2 + \cdots + j_n$ é a dimensão do bloco final.

Propriedade 4: A partir das propriedades 2 e 4, pode-se construir a solução $v(t)$ para um sistema $\dot{v} = Av, v(0) = b, y = cv$ tal que $v(t) = y(t)$. Supondo que

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=0}^{n} \left[\left(\sum_{k=0}^{m} a_k t^k \right) \exp(\sigma_i t) \cos(\omega_i t) \right] = \\ &= (a_{01} + a_{11}t + a_{21}t^2 + \cdots + a_{m1}t^m) \exp(\sigma_1 t) \cos(\omega_1 t) + \cdots \\ &\cdots + (a_{0n} + a_{1n}t + a_{2n}t^2 + \cdots a_{mn}t^m) \exp(\sigma_n t) \cos(\omega_n t) \end{aligned} \tag{8.16}$$

então a solução é dividida em três casos, a partir dos valores de ω, sendo t^M o maior grau do polinômio acima. Uma das combinações possíveis não é vista abaixo, por ser bem mais complexa que as outras (apesar de dedutível a partir delas).

<u>Caso 1:</u> Todos os valores ω são nulos e σ são iguais.

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{J}\{\sigma\}_{m+1} \\ \exp(At) &= \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} a_0 & a_1 t & a_2(t^2/2!) & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 t & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{m+1} \end{aligned} \tag{8.17}$$

<u>Caso 2:</u> Todos os valores ω são nulos e σ são diferentes.

$$\begin{aligned} A =& diag(\mathcal{J}\{\sigma_1\}_{m+1}, \mathcal{J}\{\sigma_2\}_{m+1}, \cdots, \mathcal{J}\{\sigma_n\}_{m+1}) \\ \exp(At) =& \begin{bmatrix} \exp(\mathcal{J}\{\sigma_1\}t) & & & \\ & \exp(\mathcal{J}\{\sigma_2\}t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(\mathcal{J}\{\sigma_n\}t) \end{bmatrix}_{1+2+\cdots+(m+1)} \end{aligned} \tag{8.18}$$

<u>Caso 3:</u> Os valores ω não são nulos e σ são iguais.

$$M = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix} \qquad P_k = \begin{bmatrix} (t^k/k!)\cos(\omega t) & -(t^k/k!)\sin(\omega t) \\ (t^k/k!)\sin(\omega t) & (t^k/k!)\cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} M & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M \end{bmatrix}_{m+1} \tag{8.19}$$

$$\exp(At) = \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_m \\ 0 & P_0 & P_1 & \cdots & P_{m-1} \\ 0 & 0 & P_0 & \cdots & P_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_0 \end{bmatrix}_{m+1}$$

Essas generalizações aparentam ser complexas, mas a maioria dos sistemas explorados nesta disciplina é reduzida, o que implica uma série de simplificações como, por exemplo, polinômios de graus pequenos e poucos termos somados em n.

A resolução de equações de estado, tanto a partir de sua solução geral quanto pelos blocos de Jordan, foi apresentada de maneira mais generalizada até então. Os exercícios a seguir tratam de aplicações mais específicas – e enxutas – destes conceitos.

8.2 Exercícios propostos

24 **PR 2s2022**

Determine $v(t)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solução

Note que o sistema mostrado é da forma $\dot{v} = Av, v(0) = b$. Para conhecer a solução geral $v(t)$, seja determinada a equação polinomial via (8.1),

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 4 & \lambda + 3 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 2)(\lambda + 3) + 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = -2, \; \lambda_2 = 1$$

Conforme proposto em (8.2), deve-se conhecer agora a expressão de $\exp(At)$ para determinar $v(t)$. Isto é feito através de (8.8), tal que, com $n = 2$ (dimensão de A),

$$\exp(At) = \rho_0 A^0 + \rho_1 A^1 = \rho_0 I + \rho_1 A$$

A fim de determinar os valores de ρ, será utilizada a propriedade (8.7),

$$\begin{aligned} \exp(\lambda_1 t) &= \rho_0 + \rho_1 \lambda_1 = \rho_0 - 2\rho_1 \\ \exp(\lambda_2 t) &= \rho_0 + \rho_1 \lambda_2 = \rho_0 + \rho_1 \end{aligned}$$

Solução *continuação*

Isolando os valores de ρ no sistema encontrado acima,

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \frac{1}{3}(2\exp(t) + \exp(-2t)) \\ \rho_1 &= \frac{1}{3}(\exp(t) - \exp(-2t))\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\exp(At) &= \begin{bmatrix}\rho_0 & 0 \\ 0 & \rho_0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\rho_1 & \rho_1 \\ -4\rho_1 & -3\rho_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\rho_1 + \rho_0 & \rho_1 \\ -4\rho_1 & -3\rho_1 + \rho_0\end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4\exp(t) - \exp(-2t) & \exp(t) - \exp(-2t) \\ -4(t) + 4\exp(-2t) & -\exp(t) + 4\exp(-2t)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Finalmente, escreve-se a solução geral

$$v(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4\exp(t) - \exp(-2t) & \exp(t) - \exp(-2t) \\ -4(t) + 4\exp(-2t) & -\exp(t) + 4\exp(-2t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 \\ 3\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}5\exp(t) - 2\exp(-2t) \\ -5\exp(t) + 8\exp(-2t)\end{bmatrix}}$$

25 ***PR 1s2023***

Determine $V(s)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix}6 & -10 \\ 1 & -1\end{bmatrix}v, \quad v(0) = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$$

Solução

O sistema é da mesma forma do anterior. A definição mostrada em (8.2) implica

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} = (sI - A)^{-1}v(0)$$

Portanto,

$$V(s) = \begin{bmatrix}s-6 & 10 \\ -1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\det(sI - A)}\begin{bmatrix}s+1 & -10 \\ 1 & s-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$$

onde a inversa da matriz foi resolvida por definição. Por fim,

$$V(s) = \frac{1}{(s-6)(s+1)+10}\begin{bmatrix}s+1 \\ 1\end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{s^2 - 5s + 4}\begin{bmatrix}s+1 \\ 1\end{bmatrix}}$$

26 ***PR 1s2022***

Determine (a) a forma de Jordan J e (b) Q tal que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda + 1)^3$$

Solução

Para conseguir a forma de Jordan a partir da matriz A, será seguido o procedimento descrito na propriedade 3. Em primeiro lugar, nota-se que

$$\Delta(\lambda) = (\lambda+1)^3 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

o que implica o sistema possuir multiplicidade algébrica $n_\lambda = 3$ (três autovalores repetidos). Em seguida, é necessário obter a matriz M_λ,

$$M_\lambda = A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

que, trivialmente, possui $rank(M_\lambda) = 1$ (apenas uma coluna linearmente independente). Logo, sua dimensão de espaços nulos, de acordo com (8.14), é

$$\nu(M_\lambda) = 3 - 1 = 2$$

Solução ***continuação***

Logo, são necessário dois blocos de Jordan para construir a matriz na forma final, ou seja,

$$\mathcal{J}\{\lambda\}_3 = diag(\mathcal{J}\{-1\}_2, \mathcal{J}\{-1\}_1) = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ 0 & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}}$$

Lembre-se que os espaços vazios devem ser preenchidos com 0's. O próximo passo é definir uma matriz Q que satisfaça a equação apresentada. Ela será genericamente definida como

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$AQ = \begin{bmatrix} -a_{11} + a_{21} + a_{31} & -a_{12} + a_{22} + a_{32} & -a_{13} + a_{23} + a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ -a_{21} - 2a_{31} & -a_{22} - 2a_{32} & -a_{23} - 2a_{33} \end{bmatrix}$$

$$Q\mathcal{J} = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{11} - a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{21} - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & a_{31} - a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}$$

Igualando ambas as expressões, são obtidos diversos sistemas lineares, os quais permitem escrever algumas variáveis em termos de outras, mas não de forma única. Por isso, a escolha da matriz Q é livre, contanto que siga as equações do sistema. A escolhida foi

$$\boxed{Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{11} & a_{22} & a_{11} \\ -a_{11} & a_{11} - a_{22} & -a_{11} \end{bmatrix}}$$

A depender das matrizes $A, \mathcal{J}$ e dos sistemas obtidos, pode ser que Q tenha solução única.

Determine um sistema linear homogêneo $\dot{v} = Av, y = cv$ e a condição inicial $v(0)$, ou seja, a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, vetores $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$ e $v(0) \in \mathbb{R}^n$ que produzem a solução

$$y(t) = (2 + 5t)\cos(3t) + (4 + 6t)\sin(3t)$$

Solução

A solução a ser procurada é da forma característica

$$v(t) = c \cdot \exp(At)v(0) = y(t)$$

conforme proposto anteriormente. Note também que, explicitamente,

$$y(t) = (a_{11} + a_{21}t)\exp(\sigma t)\cos(\omega t) + (a_{21} + a_{22}t)\exp(\sigma t)\sin(\omega t)$$

Para este exercício, $\sigma = 0, \omega = 3$. Portanto, pode-se construir as matrizes de acordo com (8.19), do caso 3, propriedade 4 das matrizes de Jordan, tal que

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_k = \begin{bmatrix} t^k\cos(3t) & -t^k\sin(3t) \\ t^k\sin(3t) & t^k\cos(3t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} M & I \\ 0 & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\exp(At) = \exp(\sigma t)\begin{bmatrix} P_0 & P_1 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) & t\cos(3t) & -t\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) & t\sin(3t) & t\cos(3t) \\ 0 & 0 & \cos(3t) & -\sin(3t) \\ 0 & 0 & \sin(3t) & \cos(3t) \end{bmatrix}$$

Conhecendo agora o valor de $\exp(At)$, define-se

$$v(0) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}^T$$

$$\therefore \exp(At)v(0) = \begin{bmatrix} (v_1 + v_3t)\cos(3t) - (v_2 + v_4t)\sin(3t) \\ (v_1 + v_3t)\sin(3t) + (v_2 + v_4t)\cos(3t) \\ v_3\cos(3t) - v_4\sin(3t) \\ v_3\sin(3t) + v_4\cos(3t) \end{bmatrix}$$

Uma forma conveniente de escolher os valores em $v(0)$ é fazê-lo tal que a matriz acima seja composta inteiramente por múltiplos dos termos encontrados em $y(t)$. Por exemplo,

$$\boxed{v(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T} \Rightarrow \exp(At)v(0) = \begin{bmatrix} t\cos(3t) \\ t\sin(3t) \\ \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{bmatrix}$$

Finalmente, é definida

$$c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

Solução *continuação*

tal que ela resolva a equação inicialmente proposta. Assim,

$$\begin{aligned} v(t) = c \cdot \exp(At)v(0) &= c_1 t\cos(3t) + c_2 t\sin(3t) + c_3\cos(3t) + c_4\sin(3t) = \\ &= y(t) = 5t\cos(3t) + 6t\sin(3t) + 2\cos(3t) + 4\sin(3t) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{c = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}}$$

28 ***PR 2s2023***

Determine α_0, α_1 tais que

$$A^{-2} = \alpha_0 I + \alpha_1 A, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

Solução

Mais uma vez, lançamos mão da definição da equação polinomial para calcular os autovalores relacionados ao sistema,

$$\Delta(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ 5 & \lambda + 7 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 4)(\lambda + 7) + 10 = (\lambda - 3)(\lambda + 6)$$

$$\therefore \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -6$$

Conhecendo ambos os valores, pode-se deduzir os valores de α_0, α_1 a partir de (8.7), tal que

$$\begin{aligned} (\lambda_1)^{-2} = \alpha_0 + \lambda_1\alpha_1 &\Rightarrow \frac{1}{9} = \alpha_0 + 3\alpha_1 \\ (\lambda_2)^{-2} = \alpha_0 + \lambda_2\alpha_1 &\Rightarrow \frac{1}{36} = \alpha_0 - 6\alpha_1 \end{aligned}$$

Finalmente, basta resolver o sistema linear acima para encontrar

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{1}{12} \quad \alpha_1 = \frac{1}{108}}$$

29 ***PR 2s2022***

Determine uma matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ que verifique (I representa a matriz identidade de dimensão adequada)

$$A + I = A^{-1}(3A^2 - 4A + 5I)A^{-2} - I$$

Solução

Na posse da equação matricial, o primeiro passo é reorganizá-la, tal que fique na forma característica para aplicação do teorema de Cayley-Hamilton. Assim,

$$A + I - 3A^{-1}A^2A^{-2} + 4A^{-1}AA^{-2} - 5A^{-1}IA{-2} + I = 0$$

Solução *continuação*

A seguir, utiliza-se três propriedades importantes de matrizes:

$$I = AA^{-k} = A^{-k}A \qquad A^kI = IA^k = A^k \qquad A^nA^m = A^{n+m}$$

Por isso, a equação pode ser reescrita como

$$A + 2I - 3A^{-1}I + 4IA^{-2} - 5IA^{-3} = 0 \;\Rightarrow\; A^4 + 2A^3 - 3A^2 + 4A - 5I = 0$$

Finalmente, usando (8.6), a matriz é

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}}$$

8.3 Algoritmos de resolução

Exercício 24

Dados: Sistema do tipo $\dot{v} = Av, v(0) = b$.
Objetivo: Determinar $v(t)$

1. Calcular $\det(\lambda I - A) = 0$ e, com isso, encontrar os autovalores λ.
2. Encontrar as expressões $\exp(\lambda t)$ e isolar os valores de ρ do sistema.
3. Calcular $\exp(At)$ e, com isso, fazer $v(t) = \exp(At)v(0)$.

Exercício 25

Dados: Sistema do tipo $\dot{v} = Av, v(0) = b$.
Objetivo: Determinar $V(s)$.

1. Calcular a inversa da matriz $(sI - A)$ através da definição da operação.
2. Fazer $V(s) = (sI - A)^{-1}v(0)$.

Exercício 26

Dados: Matriz A e o polinômio de seus autovalores, $\Delta(\lambda)$.
Objetivo: Determinar a forma de Jordan $\mathcal{J}\{\lambda_A\}$ e a matriz $Q : AQ = QJ$.

1. Determinar os autovalores λ a partir de $\Delta(\lambda) = 0$.
2. Calcular M_λ e $\nu(M_\lambda)$ para os valores encontrados.
3. Construir a matriz de Jordan com (8.15).
4. Definir uma matriz Q genérica, com a dimensão adequada, tal que $AQ = QJ$.
5. Resolver o sistema consequente e, com isso, propor uma matriz Q satisfatória.

Exercício 27

Dados: Solução $y(t)$ de um sistema linear homogêneo.
Objetivo: Encontrar $A, c, v(0)$ de outro sistema, tal que este tenha solução $v(t) = y(t)$.

1. Determinar os valores de σ e ω a partir da forma explícita de $y(t)$.
2. Construir as matrizes M e P_k.
3. Com os valores acima, calcular A e $exp(At)$.
4. Definir um $v(0)$ genérico que realize $exp(At)v(0)$ de forma conveniente.
5. Definir um c genérico que resolva $v(t) = c \cdot \exp(At)v(0)$, tal que $v(t) = y(t)$.

Exercício 28

Dados: Matriz A e uma equação a conectando a α_0, α_1.
Objetivo: Determinar α_0, α_1 que resolvam a equação.

1. Fazer $\det(\lambda I - A) = 0$ e, com isso, obter os autovalores λ.
2. Aplicar a propriedade (8.7) para montar um sistema que conecte os λ aos α.
3. Isolar os valores α_0, α_1.

Exercício 29

Dados: Equação matricial envolvendo A e suas potências.
Objetivo: Determinar a solução $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que resolva a equação.

1. Reescrever a equação original, de forma a deixá-la na forma característica (todos os termos do mesmo lado, igualando a zero).
2. Aplicar as propriedades da multiplicação de matrizes para simplificação.
3. Utilizar a equação (8.6) para determinar a solução final.

9 Observabilidade e controlabilidade

9.1 Resumo teórico

A resolução de sistemas lineares e sua análise foi tema central da disciplina até este instante. Foram propostas diversas técnicas de resolução de sistemas contínuos e discretos, em domínios de tempo e frequência. Além disso, foram propostas soluções equivalentes, forçadas homogêneas dos sistemas, quando aplicáveis.

A partir de agora, o foco muda para construções efetivas de sistemas dinâmicos, e uma introdução simples ao controle clássico. Este campo é extremamente amplo, e será explorado com mais profundidade apenas na disciplina EA721 (Princípios de Controle e Servomecanismo), mas aqui são apresentados conceitos pertinentes à análise de sistemas lineares. Particularmente, são descritos sistemas de entrada e saída singulares (*single-input single-output*, SISO).

O primeiro deles é o de *observabilidade*. Intuitivamente, esta corresponde à uma medida da qualidade de inferência dos estados de um sistema a partir as variáveis observáveis, ou seja, o quão bem os estados internos (desconhecidos) podem ser inferidos a partir da saída (conhecida). Por definição, um sistema contínuo autônomo descrito por

$$\dot{v}(t) = f(v(t), t), \quad y(t) = g(v(t), t)$$

é observável em t_0 se existir $\tau > 0$ tal que $y(t)\ \forall\ t \in [t_0, t_0 + \tau]$ seja suficiente para determinar $v(t_0)$. Analogamente, sistemas lineares invariantes no tempo com saída escalar, do tipo

$$\dot{v}(t) = Av(t),\ v \in \mathbb{R}^n, \quad y(t) = cv(t) \in \mathbb{R}$$

são observáveis se existir $\tau > 0$ tal que $y(t)\ \forall\ t \in [0, \tau]$ seja suficiente para determinar $v(0)$.

Para além das definições, há formas de calcular a observabilidade de um sistema linear, as quais são mostradas nas propriedades abaixo.

Propriedade 1: Um sistema linear invariante no tempo na forma $\dot{v} = Av, y = cv$ com $v \in \mathbb{R}^n$ é observável se, e somente se, o rank (ou posto) da matriz de observabilidade

$$\mathcal{O}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{9.1}$$

for completo. Em outras palavras, o sistema é observável se, e somente se,

$$\det\left(\mathcal{O}(A, c)\right) \neq 0 \tag{9.2}$$

Vale relembrar que o *rank* de uma matriz corresponde à quantidade de colunas linearmente independentes em sua composição. Portanto, toda matriz possui, ao menos, rank igual à 1. Uma matriz de rank completo é aquela que possui rank n, ou seja, todas as colunas – e linhas – são linearmente independentes umas das outras.

Propriedade 2: O sistema $\dot{v} = Av, y = cv$ é observável se, e somente se, a matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times n} \tag{9.3}$$

tiver rank completo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Para calcular, basta determinar o rank da matriz para todos os λ's autovalores de A.

Propriedade 3: Transformações de similaridade não alteram a observabilidade de um sistema linear invariante no tempo, ou seja, os sistemas

$$\dot{v} = Av,\ y = cv \quad \text{e} \quad \dot{\hat{v}} = T^{-1}AT\hat{v},\ y = cT\hat{v} \tag{9.4}$$

com T não singular (invertível), geram matrizes de observabilidade com o mesmo rank.

O segundo conceito relevante é o dual da observabilidade: a *controlabilidade*. Ao passo que o primeiro indica como pode-se conhecer os estados do sistema a partir da saída, o segundo indica quais são as manipulações (geralmente de entrada) sobre o sistema resultam em cada estado. O nome é intuitivo, já que esta medida mostra se o sistema é controlável ou não.

Por definição, um sistema contínuo descrito por

$$\dot{v}(t) = f(v(t), t)$$

é controlável em t_0 se existir $\tau > 0$ finito e uma entrada $x(t) : t \in [t_0, t_0 + \tau]$ que leve o sistema de um estado inicial $v(t_0)$ para um estado arbitrário $v(t_0 + \tau)$. Analogamente, sistemas lineares invariantes no tempo com entrada escalar, do tipo

$$\dot{v}(t) = Av(t) + bx(t),\ v \in \mathbb{R}^n, \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

são controláveis se, para qualquer estado inicial $v(0)$ e um estado $v(\tau)$ final arbitrário, existir uma entrada $x(t) : t \in [0, \tau]$ que leve o sistema de $v(0)$ a $v(\tau)$ em tempo τ finito.

Assim como no caso da observabilidade, há propriedades importantes a serem levadas em consideração.

Propriedade 1: O sistema (A, b, c, d) é controlável se, e somente se, seu sistema dual (A', c', b', d) for observável, e vice-versa; ou seja, o sistema (A, b, c, d) é observável se, e somente se, (A', c', b', d) for controlável.

Propriedade 2: O sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av + bx,\ v \in \mathbb{R}$ é controlável se, e somente se, o rank da matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{9.5}$$

for completo. Em outras palavras, os sistema é controlável se, e somente se,

$$\det(\mathcal{C}(A, b)) \neq 0 \tag{9.6}$$

Propriedade 3: O sistema $\dot{v} = Av + bx$ é controlável se, e somente se, a matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (n+1)} \tag{9.7}$$

tive rank completo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Para calcular, basta determinar o rank da matriz para todos os λ's autovalores de A.

Propriedade 4: Transformações de similaridade não alteram a controlabilidade de um sistema linear invariante no tempo, ou seja, os sistemas

$$\dot{v} = Av + bx, \quad \dot{\hat{v}} = T^{-1}AT\hat{v} + T^{-1}bx \tag{9.8}$$

com T não singular (invertível), geram matrizes de controlabilidade com o mesmo rank.

9.2 Exercícios propostos

30 ***PR 2s2023***

Determine os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser controlável,

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

Solução

De forma bastante óbvia, pode-se afirmar que o sistema deixa de ser controlável quando não vale a condição de controlabilidade. Antes que isso se verifique, a matriz de controlabilidade deve antes ser construída a partir do sistema $\dot{v} = Av + bx$ apresentado. Assim,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ab = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ 1 \\ \beta + 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 b = \begin{bmatrix} \beta^2 - \alpha^2 & \alpha\beta + \alpha & \alpha^2 \\ -\alpha\beta - \alpha & -\alpha^2 + \alpha + 1 & \alpha + \alpha\beta \\ -\alpha & \beta + 1 & \alpha + \beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^2 + \alpha\beta + \alpha \\ -\alpha^2 + \alpha + 1 \\ \beta^2 + \beta + 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz de controlabilidade é escrita via (9.5),

$$\mathcal{C}(A, b) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha + \beta & \beta^2 + \alpha\beta + \alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 + \alpha + 1 \\ 1 & \beta + 1 & \beta^2 + \beta + 1 \end{bmatrix}$$

Seu determinante,

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{C}(A,b)) =& [(\beta^2 + \beta + 1) - (\beta + 1)(-\alpha^2 + \alpha + 1)] - \\ & - (\alpha + \beta)[(\beta^2 + \beta + 1) - (-\alpha^2 + \alpha + 1)] + \\ & + (\beta^2 + \alpha\beta + \alpha)[(\beta + 1) - 1] = \\ =& - \alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha = -\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1) \end{aligned}$$

Aplicando a condição de controlabilidade estabelecida em (9.6), o sistema deixa de ser controlável quando

$$\det(\mathcal{C}) = 0 \ \therefore \ \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

$$\boxed{\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 1 \quad \text{para qualquer } \beta}$$

Note que não existe um β que faça o sistema deixar de ser controlável, então a condição fica restrita apenas ao valor de α.

Determine os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser observável,

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

Solução

Como no exercício anterior, a matriz de observabilidade será construída e, a partir dela, será verificada a condição contrária à sua realização no sistema $\dot{v} = Av, y = cv$. Logo,

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$cA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta + 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$cA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha^2 + \beta & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta + 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha\beta & -\alpha^2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha^2 + \beta + 1 & \alpha\beta - \alpha & -\alpha^2 + \beta + 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a definição (9.1),

$$\mathcal{O}(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta + 1 & -\alpha \\ -\alpha^2 + \beta + 1 & \alpha\beta - \alpha & -\alpha^2 + \beta + 1 \end{bmatrix}$$

Seu determinante,

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{O}) =& [(-\alpha^2 + \beta + 1)(\beta + 1) - (-\alpha)(\alpha\beta - \alpha)] + \\ &+ [(\alpha)(\alpha\beta - \alpha) - (\beta + 1)(-\alpha^2 + \beta + 1)] = \\ =& 2\alpha^2(\beta - 1) \end{aligned}$$

Aplicando a condição de observabilidade estabelecida em (9.2), o sistema deixa de ser observável quando

$$\det(\mathcal{O}) = 0 \;\therefore\; \boxed{\alpha = 0, \quad \beta = 1}$$

9.3 Algoritmos de resolução

Ambos os exercícios deste capítulo seguem o mesmo algoritmo!

Exercícios 30 e 31

Dados: Sistemas $\dot{v} = Av + bv$ (controlabilidade) ou $\dot{v} = Av, y = cv$ (observabilidade).
Objetivo: Determinar os valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema não é realizável.

1. Calcular as matrizes Ab, A^2b (cont.) ou cA, cA^2 (obs.).
2. Construir as matrizes $\mathcal{C}(A, b)$ (cont.) ou $\mathcal{O}(A, c)$ (obs.).
3. Determinar os valores α, β para os quais $\det(\mathcal{C}) = 0$ (cont.) ou $\det(\mathcal{O}) = 0$ (obs.).

10 Estabilidade

10.1 Resumo teórico

O estudo introdutório sobre sistemas de controle continua nesta seção através da introdução de outro conceito relevante: o de *estabilidade*. Em particular, serão tratados sistemas cuja estabilidade é sinônimo de entradas e saídas limitadas (*bounded-input bounded-output*, BIBO), ou seja aqueles nos quais

$$|x(t)| < b \;\Rightarrow\; |y(t)| < \infty$$

Discorrer sobre a técnicas de cálculo de estabilidade é também um assunto extenso, e pode envolver técnicas complexas – literalmente – como o critério de Nyquist. Neste momento, é mais sensato resumir este conceito a algumas propriedades mais relacionadas a sistemas lineares, adiante.

Propriedade 1: Um sistema linear invariante no tempo causal descrito por uma função de transferência racional

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)},\; \Omega_h = \{s \in \mathbb{C},\, \mathrm{Re}(s) > \sigma\} \tag{10.1}$$

onde $\sigma = \max_k \mathrm{Re}(\lambda_k)$, é BIBO estável se, e somente se, todos os polos λ_k tiverem parte real negativa. Em outras palavras, a estabilidade está condicionada a

$$\mathrm{Re}\{\lambda_k\} > 0 \;\Leftrightarrow\; D(\lambda_k) = 0 \tag{10.2}$$

Um polinômio $D(p)$ de coeficientes constantes positivos que possui todas as raízes λ_k é chamado *polinômio de Hurwitz*.

Propriedade 2: O polinômio

$$D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k$$

possui todas as raízes com parte real negativa se, e somente se, seus *determinantes de Hurwitz* (também chamados *menores principais líderes* de Δ_m) forem maiores que zero, isto é,

$$\det(\Delta_k) > 0 \quad \text{onde} \quad \Delta_k = \begin{bmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} & \alpha_m & \cdots & 0 \\ \alpha_{m-5} & \alpha_{m-4} & \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 \end{bmatrix}_{k\times k} \tag{10.3}$$

com $k = 1, 2, ..., m$.

Propriedade 3: Uma alternativa ao cálculo explícito dos determinantes de Hurwitz é a *tabela de Routh-Hurwitz*. Dado o polinômio $D(p)$, a tabela é construída da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\mathrm{p}^m & \alpha_m & & \alpha_{m-2} & & \alpha_{m-4} & \cdots \quad \alpha_1 \\
\mathrm{p}^{m-1} & \alpha_{m-1} & & \alpha_{m-3} & & \alpha_{m-5} & \cdots \quad \alpha_0 \\
\mathrm{p}^{m-2} & \beta_m = \frac{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}-\alpha_m\alpha_{m-3}}{\alpha_{m-1}} & & \beta_{m-1} = \frac{\alpha_{m-1}\alpha_{m-4}-\alpha_m\alpha_{m-5}}{\alpha_{m-1}} & & \beta_{m-2} = \frac{\alpha_{m-1}\alpha_{m-6}-\alpha_m\alpha_{m-7}}{\alpha_{m-1}} & \cdots \\
\mathrm{p}^{m-3} & \beta'_m = \frac{\beta_m\alpha_{m-3}-\alpha_{m-1}\beta_{m-1}}{\beta_m} & & \beta'_{m-1} = \frac{\beta_m\alpha_{m-5}-\alpha_{m-1}\beta_{m-2}}{\beta_m} & & \beta'_{m-2} = \frac{\beta_m\alpha_{m-7}-\alpha_{m-1}\beta_{m-3}}{\beta_m} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\mathrm{p}^0 & \beta_m^{(n)} = \alpha_0 & & & & &
\end{array}
$$

A versão acima é uma generalização, na qual algumas ressalvas devem ser feitas. A primeira é sobre a quantidade de elementos por linha. As duas últimas linhas sempre possuem 1 elemento, as duas acima possuem 2, e assim por diante; até que a primeira linha tenha $\lfloor m/2 \rceil$ elementos. Nestes pares de linhas com a mesma quantidade de elementos, o último elemento da linha de baixo é sempre α_0.

Uma aplicação mais clara será feita durante a resolução de exercícios.

Propriedade 4: Se não ocorrer nenhum zero na primeira coluna da tabela de Routh, o número de mudanças de sinal nela é igual ao número de raízes do polinômio com parte real positiva – não há mudanças de sinal em caso de estabilidade. Por outro lado, a ocorrência de um zero indica que o polinômio não é Hurwitz e, portanto, o sistema também não é BIBO estável.

A discussão sobre estabilidade agora concentra-se no estado do sistema. A estabilidade de estado é definida pelo comportamento das trajetórias do vetor de estados para entrada constante e condições iniciais em torno do ponto de equilíbrio $f(\bar{v}) = 0$. Portanto, serão analisadas as configurações destes pontos – que podem ser estáveis, assintoticamente estáveis ou instáveis – em sistemas autônomos $\dot{v} = Av$. Além disso, será descrito como verificar o comportamento do sistema em cada caso.

<u>Caso 1:</u> O ponto de equilíbrio $\bar{v}$ é estável se, para $\varepsilon > 0$, existir

$$\alpha(\varepsilon) > 0 : ||v(0) - \bar{v}|| < \alpha(\varepsilon),\ \forall v(0) \ \Rightarrow\ ||v(t) - \bar{v}|| < \epsilon,\ \forall t \geq 0$$

O sistema é estável se

$$\mathcal{J}\{\lambda_A\}_n : n = 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}\{\lambda_{\mathcal{J}}\} \leq 0 \tag{10.4}$$

ou seja, se os blocos de Jordan associados aos autovalores tiver ordem 1 e cada um de seus respectivos autovalores tiver parte real não-positiva.

<u>Caso 2:</u> O ponto de equilíbrio $\bar{v}$ é assintoticamente estável se for estável e, além disso, existir

$$\alpha > 0 : ||v(0) - \bar{v}|| < \alpha,\ \forall v(0) \ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty} v(t) = \bar{v}$$

O sistema é assintoticamente estável se

$$\mathcal{J}\{\lambda_A\}_n : n = 1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{Re}\{\lambda_{\mathcal{J}}\} \leq 0 \tag{10.5}$$

ou seja, se apenas uma das condições de estabilidade for atendida.

<u>Caso 3:</u> O ponto de equilíbrio e o sistema são instáveis caso não sejam nem estáveis, nem assintoticamente estáveis, isto é, existir um i-ésimo valor

$$\mathcal{J}\{\lambda_A\}_n : n \neq 1 \quad \text{e/ou} \quad \mathrm{Re}\{\lambda_{\mathcal{J}}\} \geq 0 \tag{10.6}$$

Finalmente, existem algumas propriedades particularmente importantes sobres sistemas dinâmicos estáveis, usando *condições de Lyapunov*. Suas relevâncias vêm das propriedades seguintes.

Propriedade 4: Se uma *função de Lyapunov* $\psi(v)$ existir em um dado domínio Ω que contenha a origem do espaço de fase $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, então o sistema é assintoticamente estável caso

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(v) > 0 \ \forall v \in \Omega^*, \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \ \forall v \in \Omega^* \tag{10.7}$$

Propriedade 5: O sistema linear autônomo $\dot{v} = Av$ é assintoticamente estável se, e somente se, existir um $P = P' > 0$ (matriz igual à sua transposta e positiva) tal que

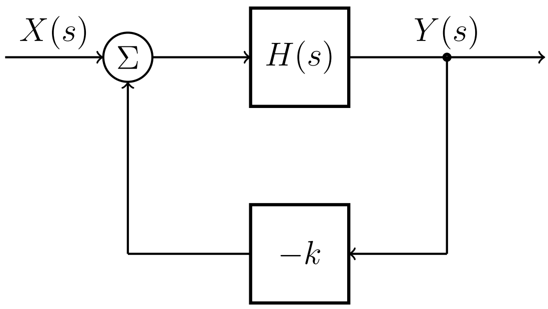
$$-Q = A'P + PA < 0 \tag{10.8}$$

Esta propriedade é chamada *desigualdade de Lyapunov*. Ela tem uma solução única, simétrica e definida positiva se, e somente se, os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Com estas propriedades, é possível descrever sistemas dinâmicos de maneira bastante completa. Mesmo que sejam conceitos abstratos, espera-se que os exercícios forneçam mais domínio prático.

10.2 Exercícios propostos

Obs.: originalmente, a disciplina foi elaborada usando uma notação diferente da deste guia.
Particularmente, os exercícios abaixo utilizam $H(s) = C(s)G(s)$ como a função de transferência da malha aberta, enquanto o resumo teórico acima o definia como $H(s) = Y(s)/X(s)$ a função de transferência da malha fechada. Por conveniência, os exercícios abaixo seguirão o padrão do professor da disciplina, como abaixo. Consulte o material original em caso de dúvidas.



32 ***PR 2s2023***

Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada com realimentação proporcional seja BIBO estável, onde

$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 7s + 12}$$

Solução

A partir da malha aberta, seja

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \ \Rightarrow \ D(s) + kN(s) = 0$$

$$\therefore \ (s^3 + 7s + 12) + k(s^2 - s) = s^3 + ks^2 + (7 - k)s + 12 = 0$$

Solução *continuação*

Esta equação deve ser analisada na tabela de Routh-Hurwitz, tal que, para que o sistema seja BIBO estável, todos os elementos da primeira coluna devem ser positivos (de acordo com a propriedade 4). Por conseguinte,

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 7-k \\ s^2 & k & 12 \\ s^1 & [k(7-k)-12]/k & \\ s^0 & 12 & \end{array}$$

onde $k > 0$ e $k(7-k) - 12 > 0$, simultaneamente. Resolvendo o segundo caso,

$$-k^2 + 7k - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; k_1 = 3,\; k_2 = 4$$

o que implica a estabilidade estar condicionada ao intervalo

$$\boxed{3 < k < 4}$$

33 ***PR 1s2022***

Um sistema linear invariante no tempo dependente dos parâmetros α, β e uma matriz P simétrica definida positiva produzem (A' indica o transposto da matriz A)

$$-Q = A'P + PA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & 0 \\ \alpha & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Considerando a desigualdade de Lyapunov, determine os intervalos de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que garantem estabilidade assintótica do sistema linear.

Solução

A desigualdade de Lyapunov em (10.8) é verificada apenas se os menores principais líderes forem positivos. Partindo então da definição em (10.3),

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Através dos determinantes verifica-se a condição,

$$\det(\Delta_1) = 2 > 0 \quad \det(\Delta_2) = 2\beta > 0 \quad \det(\Delta_3) = 4\beta - \beta\alpha^2 > 0$$

Do segundo e do terceiro, fica claro que

$$\boxed{\beta > 0} \qquad 4 - \alpha^2 > 0 \;\therefore\; \boxed{-2 < \alpha < 2}$$

34 ***PR 1s2023***

Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados $\mathbb{R}^2$ no qual a função candidata garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não-linear dado por

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1^3 v_2^2 + 2v_1 v_2^4 - 5v_1 v_2^2 \\ \dot{v}_2 &= v_1^4 v_2 + 2v_1^2 v_2^3 - 5v_1^2 v_2 \end{aligned}$$

Solução

As condições para que uma função de Lyapunov garanta estabilidade assintótica ao sistema foram estabelecidas em (10.7). Aqui, resta verificá-las. O mais trivial é perceber que

$$\psi(v_1, v_2) > 0 \,\forall\, (v_1, v_2) \neq (0, 0)$$

Logo, basta garantir que sua derivada seja negativa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(v_1, v_2) &= 2(0.5v_1)\dot{v}_1 + 2(0.5v_2)\dot{v}_2 = v_1\dot{v}_1 + v_2\dot{v}_2 = \\ &= v_1(v_1^3 v_2^2 + 2v_1 v_2^4 - 5v_1 v_2^2) + v_2(v_1^4 v_2 + 2v_1^2 v_2^3 - 5v_1^2 v_2) = \\ &= 2v_1^4 v_2^2 + 4v_1^2 v_2^4 - 10v_1^2 v_2^3 = 2v_1^2 v_2^2(v_1^2 + 2v_2^2 - 5) \end{aligned}$$

Finalmente, a região onde a função é assintoticamente estável é

$$\boxed{(v_1, v_2) \in \Omega = \{(v_1, v_2) : v_1^2 + 2v_2^2 - 5 < 0\}}$$

35 ***PC 2s2023 e PR 2s2022***

Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -10 & 1 & 0 \\ 10 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

Neste exercício, serão aplicadas as propriedades (10.4) - (10.6). O primeiro passo, para cada matriz, é encontrar seus autovalores associados. Assim,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda - 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda - 4 \end{bmatrix}$$

Pelo método de Laplace, o determinante desta matriz é dado por

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda[-\lambda(-\lambda - 5)(-\lambda - 4)] = \lambda^2(\lambda + 5)(\lambda + 4) = 0$$

$$\therefore\ \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -5, \lambda_4 = -4}$$

Portanto, há três blocos de Jordan associados aos autovalores encontrados, dados, respectivamente, por

$$\mathcal{J}\{\lambda_{1,2}\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{J}\{\lambda_3\} = \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix} \quad \mathcal{J}\{\lambda_4\} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$$

Note que o primeiro bloco, $\mathcal{J}\{\lambda_{1,2}\}$, está associado a autovetores com parte real positiva. Esta condição é suficiente para classificar o sistema como instável.
Agora para a segunda matriz,

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = -\lambda[-\lambda(\lambda^2 + 1)] + 1[1(\lambda^2 + 1)] = 0$$

$$\therefore\ \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = j, \lambda_3 = \lambda_4 = -j}$$

Dessa vez, os autovetores estão associados a duas matrizes de Jordan,

$$\mathcal{J}\{\lambda_{1,2}\} = \begin{bmatrix} -j & 1 \\ 0 & -j \end{bmatrix} \quad \mathcal{J}\{\lambda_{3,4}\} = \begin{bmatrix} j & 1 \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

Desta vez, ambas as matrizes constituem o bloco de Jordan do sistema na forma mínima (dois blocos de dimensão 2 para forma bloco de dimensão 4) e estão ambas associadas a autovalores não-positivos, o que faz do sistema estável. Finalmente, para a terceira matriz,

$$C - \lambda I = \begin{bmatrix} -2-\lambda & -10 & 1 & 0 \\ 10 & -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & -10 \\ 0 & 0 & 10 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \det(C - \lambda I) = (-2-\lambda)[(-2-\lambda)((-2-\lambda)^2 + 100)] + 10[10((-2-\lambda)^2 + 100)] = 0$$

Resolvendo, os autovalores da matriz original são dados por

$$\boxed{\lambda_1 = -2 + j10 \qquad \lambda_2 = -2 - j10}$$

Os blocos de Jordan associados a ambos são os próprios valores de λ. Note, todavia, que eles não formam um bloco de Jordan do sistema em forma mínima (dois blocos de dimensão 1 para formar bloco de dimensão 4). Por conseguinte, o sistema é assintoticamente estável.

10.3 Algoritmos de resolução

Exercício 32

Dados: Função de transferência $H(s)$.
Objetivo: Determinar o intervalo de k que faça do sistema BIBO estável.

1. A partir $H(s)$, fazer $D(s) = kN(s) = 0$.
2. Construir a tabela de Routh-Hurwitz a partir do polinômio acima.
3. Determinar os valores de k tal que todos os elementos da primeira coluna sejam positivos. Eles fornecem o intervalo de k para BIBO estabilidade.

Exercício 33

Dados: Sistema linear $-Q = A'P + PA$.
Objetivo: Determinar os intervalos de α, β que garantem estabilidade assintótica do sistema.

1. Calcular os menores principais líderes e impor que seus determinantes sejam positivos.
2. Determinar os intervalos de α e β em cada caso que a condição acima seja satisfeita.

Exercício 34

Dados: Função de Lyapunov $\psi(v)$ e as expressões das derivadas $\dot{v}$.
Objetivo: Determinar um conjunto $\Omega \in \mathbb{R}$ assintoticamente estável na origem.

1. Calcular a expressão para $\dot{\psi}(v)$ e impor que ela seja menor que zero.
2. Definir $(v) \in \Omega = \{(v) : \dot{\psi}(v) < 0\}$.

Exercício 35

Dados: Matrizes representativas de sistemas lineares.
Objetivo: Classificar o sistema em relação à sua estabilidade.

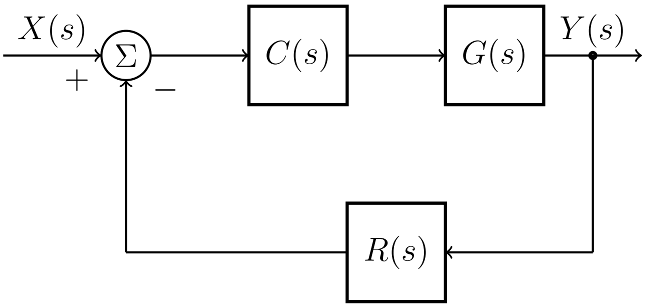
1. Calcular os autovalores de cada matriz.
2. Determinar a forma de Jordan associada, através dos autovalores.
3. Classificar de acordo com as definições (10.4), (10.5) e (10.6).

11 Introdução à realimentação

11.1 Resumo teórico

O mecanismo de realimentação é, talvez, um dos mais importantes já inventados no tratamento de sistemas dinâmicos. Não só em sistemas lineares e controle, mas áreas como aprendizado de máquina e eletrônica também possuem arquiteturas com mecanismos análogos, os quais foram extremamente importantes para suas respectivas evoluções.

Nesta seção, a arquitetura estudada será uma das mais simples possíveis, conforme ilustrado abaixo.



Implementação de realimentação em um sistema de malha fechada.

Para simplificação, será assumido que $R(s) = k$ (realimentação proporcional) e, portanto, que a função de transferência do sistema é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{kC(s)G(s)}{1 + kC(s)G(s)} = \frac{kF(s)}{1 + kF(s)}$$

A dinâmica de um sistema linear descrito pela malha fechada mostrada depende da localização de seus polos. Via de regra, para que o sistema seja estável, é necessário que todos os polos e zeros possuam parte real negativa, conforme visto anteriormente.

Logo, pode-se construir um mapeamento, no plano complexo, dos locais onde se encontram os polos e zeros de um sistema descrito por

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0} = \frac{\prod_{i=1}^{m-1}(s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n-1}(s + p_j)} \tag{11.1}$$

onde $s_z = \{s_i = -z_i\}_{i=1}^{m-1}$ é o conjunto de zeros do sistema e $s_p = \{s_j = -p_j\}_{j=1}^{n-1}$, o de polos.

A partir da localização dos polos e zeros no plano imaginário, pode-se construir um diagrama de lugar das raízes neste. Para tanto, segue-se um conjunto de regras – denominadas *regras de Evans* – que descreve como se comportam os ramos que saem dos polos e zeros. Um resumo das regras está apresentado adiante, bem como uma ilustração de sua aplicação. [8]

Regra 0: O lugar das raízes possui n ramos e é sempre simétrico em relação ao eixo real.

Regra 1: Todos os n ramos começam nos polos de $F(s)$ e m destes terminam nos zeros de $F(s)$.

Regra 2: Os $n - m$ ramos que não vão para zeros, tornam-se assíntotas, que definem os ângulos

$$\theta_l = \left(\frac{2l - 1}{n - m}\right)\pi \quad \text{onde} \quad l = 1, 2, ..., n - m \tag{11.2}$$

com o eixo horizontal e que passam pela abscissa

$$\sigma = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i\right) \tag{11.3}$$

Regra 3: Existe lugar das raízes no eixo real à esquerda de um número ímpar de polos e zeros.

Regra 4: A condição de ângulo

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i - \sum_{j=1}^{n} \phi_j = (2k+1)180°,\ k \in \mathbb{Z} \tag{11.4}$$

é utilizada para determinar os ângulos de partida dos zeros e chegada nos polos. Analogamente, o ganho do sistema pode ser calculado pela condição de módulo,

$$k = \frac{\prod_{j=1}^{n} |s - p_j|}{\prod_{i=1}^{m} |s - z_i|} \tag{11.5}$$

Regra 5: Se , em um ponto s_0 do lugar das raízes, um ou mais ramos se cruzarem (raiz múltipla da equação característica), então

$$D'(s_0)N(s_0) - D(s_0)N'(s_0) = 0 \tag{11.6}$$

Regra 6: Possíveis pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário podem ser determinados pelo ganho crítico k_c, via critérios de estabilidade, como a Tabela de Routh.

Manipular e entender estas regras é fundamental para aplicar o método do lugar das raízes e construir seu esboço, que, por sua vez, determina o controle de um sistema dinâmico. Dois exercícios práticos são propostos para trabalhar os conceitos associados a estas regras.

11.2 Exercícios propostos

Assim como no capítulo anterior, a notação a ser adotada é a da disciplina. Consulte o material original em caso de dúvidas.

36 ***PC 2s2022***

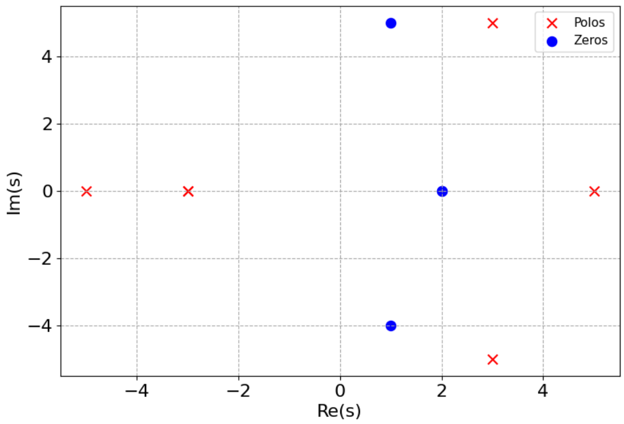
Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, no número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para

$$H(s) = \frac{(s-2)^2(s-1-5j)(s-1+4j)}{(s-5)(s-3-5j)(s-3+5j)(s+3)^2(s+5)}$$

Solução

O primeiro passo nesse exercício é construir um esboço dos polos e zeros no plano complexo. Para isso, basta determinar os valores nos quais $D(s) = 0$ (n polos) e $N(s) = 0$ (m zeros). Como ambos são polinômios separados em parênteses, isso implica zerar termo a termo.

$$s_p = \{5, 3+5j, 3-5j, -3, -3, -5\}$$
$$s_z = \{2, 2, 1+5j, 1-4j\}$$



Pela regra 1, os ramos devem partir dos polos e chegar nos zeros e, portanto, caso não haja um par polo-zero no intervalo, só existe lugar das raízes entre um par de polos (ou zeros). Com isso, percebe-se que há lugar das raízes no intervalo $[-5, -3]$ e, em seguida, em $[-3, 5]$.

$$\therefore \boxed{I \in [-5, 5]}$$

Se, hipoteticamente, houvesse um polo em 0, os intervalos de lugar das raízes no eixo real seriam $[-5, -3], [0, 5]$. O número de assíntotas é a diferença entre o número de polos e zeros:

$$\boxed{n - m = 6 - 4 = 2}$$

Os ângulos são calculados via (11.2),

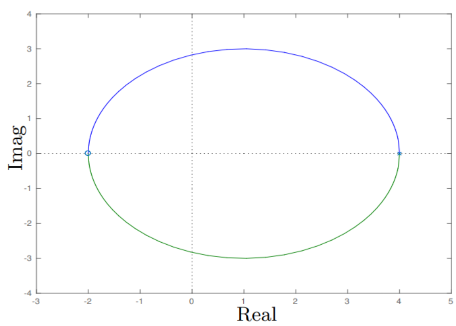
$$\theta_l = \left(\frac{2l - 1}{2}\right)\pi = \boxed{\pm\frac{\pi}{2}}$$

Por último, os encontros são calculados com (11.3). Vale lembrar que p, z representam, respectivamente, as distâncias relativas dos polos e zeros ao eixo imaginário.

$$\sigma = \frac{1}{2}[(-5 - 3 - 3 + 3 + 3 - 5) - (1 + 1 + 2 + 2)] = \boxed{-3}$$

37 ***PR 2s2023***

No lugar das raízes da figura (dois polos em 4, dois zeros em -2), determine os valores de ω e o valor de k nos cruzamentos com o eixo imaginário.



Solução

A partir do número de polos e zeros apresentado, deduz-se que a função de transferência é

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s+2)^2}{(s-4)^2}$$

Logo,

$$D(s) + kN(s) = 0 \ \therefore\ (s^2 - 8s + 16) + k(s^2 + 4s + 4) = 0$$

Para conhecer também os valores de ω a partir desta equação, seja $s = j\omega$. Rearranjando,

$$(1+k)(-\omega^2) + (4k-8)j\omega + (16+4k) = 0 \ \Leftrightarrow\ \boxed{k = 2 \quad \omega^2 = 8}$$

ou seja, $\omega = \pm 2\sqrt{2}$. Lembre-se que $\omega > 0 \in \mathbb{R}$.

38 ***PC 2s2023***

Determine, para o lugar das raízes de um sistema realimentado proporcional com

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+8)}{(s-2)(s-8)}$$

(a) os cruzamentos no eixo real e (b) os valores de k nos cruzamentos.

Solução

A exemplo do primeiro exercício, um esboço pode ser feito para ajudar na compreensão do problema. De forma simples, percebe-se que os pontos no plano complexo são:

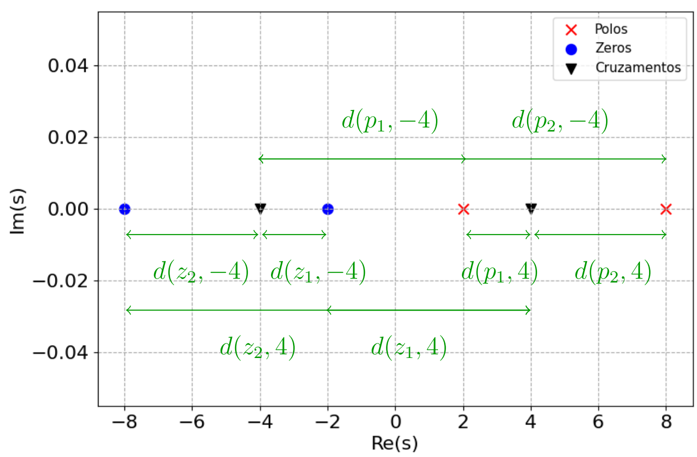
$$s_p = \{2, 8\} \qquad s_z = \{-2, -8\}$$

Além disso, são marcados os cruzamentos com o eixo real, calculados com (11.6),

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 10s + 16}{s^2 - 10s + 16} \Rightarrow (s^2 - 10s + 16)(2s + 10) - (2s - 10)(s^2 + 10s + 16) = 0$$

Resolvendo a equação acima,

$$20s^2 - 320 = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{s = \pm 4}$$



Solução *continuação*

Por último, procura-se o valor de k através de sua definição em (11.5), usando as distâncias $d(\cdot,\cdot)$ entre os polos, zeros e pontos de cruzamento, conforme destacado na imagem acima.

$$k_{-4} = \frac{d(p_1,-4)d(p_2,-4)}{d(z_1,-4)d(z_2,-4)} = \frac{12\times 6}{2\times 4} = \boxed{9}$$

$$k_4 = \frac{d(p_1,4)d(p_2,4)}{d(z_1,4)d(z_2,4)} = \frac{2\times 4}{12\times 8} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

11.3 Algoritmos de resolução

Exercício 36

Dados: Função de transferência $H(s)$.
Objetivo: Encontrar (1) intervalos no eixo real onde existem raízes, (2) o número de assíntotas, (3) os ângulos das assíntotas e (4) o ponto de encontro das assíntotas no eixo real.

0. Fazer um esboço do lugar das raízes, nos pontos onde $D(s) = 0$ e $N(s) = 0$.
1. Definir o intervalo onde as raízes se encontram, por inspeção do esboço.
2. Calcular a diferença entre o número de polos e de zeros, $n - m$.
3. Calcular os ângulos via (11.2).
4. Calcular os pontos de encontro via (11.3).

Exercício 37

Dados: Diagrama de lugar das raízes, com número de zeros e polos.
Objetivo: Determinar ω, k no cruzamento com o eixo imaginário.

1. Deduzir a função de transferência a partir da quantidade e posição de zeros e polos.
2. Calcular a expressão $D(s) + kN(s) = 0$.
3. Substituir $s = j\omega$ e resolver a expressão acima.

Exercício 38

Dados: Função de transferência $H(s)$.
Objetivo: Encontrar os cruzamentos no eixo real e os valores de k nos cruzamentos.

1. Determinar os zeros e polos do sistema a partir de $H(s)$.
2. Calcular os cruzamentos com o eixo real via (11.6).
3. Fazer o esboço do lugar das raízes e calcular as distâncias de todos os zeros e polos a todos os cruzamentos.
4. Encontrar os valores de k com (11.5).

Considerações finais

Quando comecei a escrever esse guia, em meados de Fevereiro/2024, não havia nenhuma pretensão que se tornasse algo além de uma coletânea de exercícios resolvidos. Aliás, minha primeira ideia era fazer um álbum de fotos com meus rascunhos de quando fiz a matéria – que por algum motivo ainda eu tinha guardados. Mas, logo que prestei atenção à minha caligrafia, vi que seria obrigado a digitar as resoluções caso mais alguém quisesse lê-las.

Foi quando percebi que seria uma ótima oportunidade de criar algo que, como aluno, eu sempre desejei: um resumo direcionado para a prova escrito por um ex-aluno. A visão de outra pessoa sobre um mesmo assunto poderia me dar uma orientação sobre quais são os conteúdos mais relevantes, e distingui-los dos mais detalhistas. Além disso, aprender uma mesma matéria sobre a ótica de outra pessoa poderia me ajudar a entender conteúdos que, para mim, estivessem confusos.

Outro aspecto importante na decisão de escrever o guia é o tempo. Por mais que seja essencial que passemos boas horas estudando um conteúdo para entendê-lo bem, nem sempre dispomos de tempo para balancear disciplinas e atividades extracurriculares. Algumas vezes a praticidade fala mais alto, e tudo que queremos é uma resolução pronta para nos prepararmos para uma prova.

Eu levei tudo isso em consideração na minha escrita. Gastei muitas horas (talvez além do que deveria) para deixar tudo da maneira mais organizada e clara possível, e fiquei feliz ao ver alunos levando o material para tirar dúvidas nas monitorias. Até mesmo tive o esforço de copiar e colar uma capa do StackOverflow! Tudo foi feito para que esse guia esteja disponível para turmas futuras, e seja corrigido e aperfeiçoado por outros alunos. Mesmo assim, se este guia já te deu um norte nos estudos, ajudou a tirar uma dúvida, ou te ensinou algo – por menor que seja – considero que meu objetivo foi cumprido.

Espero que o semestre tenha sido proveitoso para todos, e desejo sucesso no futuro do curso!

Álvaro Ribas
Julho 2024

Referências

[1] I.S. Bonatti, A. Lopes, P.L.D. Peres, C.M. Agulhari, "Linearidade em sinais e sistemas", 1ªed, Ed. Blucher, 2015.

[2] José C. Geromel, Alvaro G.B. Palhares, "Análise linear de sistemas dinâmcios: teoria, ensaios práticos e exercícios", 3ªed, Ed. Blucher, 2019.

[3] Grant B. Gustafson, "2250 Engineering Math, Lecture Notes", Ch.8: Laplace Transform, University of Utah Math Derpatment, 2009.

[4] Neil Donaldson, "Math 147: Complex Analysis, Lecture Notes", Ch.6: Residues, University of California, Irvine, Spring 2022.

[5] Dennis Freeman, "Signals and systems", Lecture 5: Z transform, MIT OpenCourseWare, 6.003, Fall 2011.

[6] P.T. Clemson, A. Stefanovska, "Discerning non-autonomous dynamics", Physics Reports, Volume 542, Issue 4, 30 September 2014, Pages 297-368.

[7] S. Cañez, "Notes on Jordan Form", Math 334; Northwestern University Institute of Mathematics, Summer 2015.

[8] M. Souza, "Fundamentos de Sistemas de Controle – Parte IV: Análise e Projeto via Lugar das Raízes", Cap. 2, pág. 11-17.