1ª Questão: Determine $V(s)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(s) = (sI - A)^{-1} v(0) = \begin{bmatrix} s-6 & 10 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 4} \begin{bmatrix} s+1 & -10 \\ 1 & s-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} s+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2ª Questão: Determine: a) J (forma de Jordan); b) Q tal que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda + 2)^3$$

$$A - (-2)I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ rank} = 1, \text{ dimensão do espaço nulo} = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow J = \text{diag}(J_2(-2), J_1(-2)) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & d & a \\ b & e & b \\ -b & -b-e & -b \end{bmatrix}, \ a, b \neq 0$$

3ª Questão: Determine um sistema linear homogêneo $\dot{v} = Av$, $y = cv$ e a condição inicial $v(0)$ (i.e., matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vetores $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $v(0) \in \mathbb{R}^n$) que produzem como solução

$$y(t) = (2 + 5t)\cos(3t) + (4 + 6t)\ \text{sen}(3t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(At) = \begin{bmatrix} \cos(3t) & -\text{sen}(3t) & t\cos(3t) & -t\ \text{sen}(3t) \\ \text{sen}(3t) & \cos(3t) & t\ \text{sen}(3t) & t\cos(3t) \\ 0 & 0 & \cos(3t) & -\text{sen}(3t) \\ 0 & 0 & \text{sen}(3t) & \cos(3t) \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Determine α_0 e α_1 tais que

$$A^{-2} = \alpha_0 I + \alpha_1 A, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

$$(-2)^{-2} = \alpha_0 - 2\alpha_1, \ 3^{-2} = \alpha_0 + 3\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{7}{36}, \ \alpha_1 = \frac{-1}{36}$$

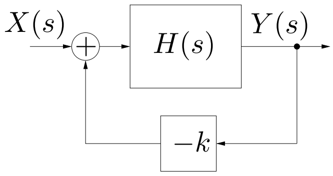
5ª Questão: Determine os valores de $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 \\ -2\beta & 0 & 2 \\ -2 & 1 & \beta \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta^2 - 2\beta + 2 \\ 0 & 2 - 2\beta & -4 + 2\beta - 2\beta^2 \\ 1 & \beta - 2 & 2 - 2\beta - 4\beta + \beta^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = -4(2 + \beta - \beta^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 2, \ \beta = -1$$

6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 7s + 6}$$

$$D(s) = s^3 + ks^2 + (7-k)s + 6 \quad , \quad 1 < k < 6$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados $\mathbb{R}^2$ no qual a função $\psi(v_1, v_2)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não linear dado por

$$\dot{v}_1 = v_1^3 v_2^2 + 2v_1 v_2^4 - 5v_1 v_2^2$$
$$\dot{v}_2 = v_1^4 v_2 + 2v_1^2 v_2^3 - 5v_1^2 v_2$$

Tem-se $\psi(v_1, v_2) > 0$, $\forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ e

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(v_1, v_2) &= v_1\dot{v}_1 + v_2\dot{v}_2 \\
&= v_1(v_1^3 v_2^2 + 2v_1 v_2^4 - 5v_1 v_2^2) + v_2(v_1^4 v_2 + 2v_1^2 v_2^3 - 5v_1^2 v_2) \\
&= v_1^4 v_2^2 + 2v_1^2 v_2^4 - 5v_1^2 v_2^2 + v_1^4 v_2^2 + 2v_1^2 v_2^4 - 5v_1^2 v_2^2 \\
&= 2v_1^2 v_2^2 (v_1^2 + 2v_2^2 - 5) < 0, \quad \forall (v_1, v_2) \neq (0,0), \quad \text{se } (v_1, v_2) \in \Omega = \{(v_1, v_2) : v_1^2 + 2v_2^2 - 5 < 0\}
\end{aligned}$$

8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

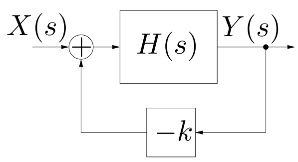
a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Instável (parte real nula — forma de Jordan de tamanho não mínimo)

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Estável (parte real negativa no bloco de Jordan 3 por 3, parte real nula no bloco 1 por 1)

9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para

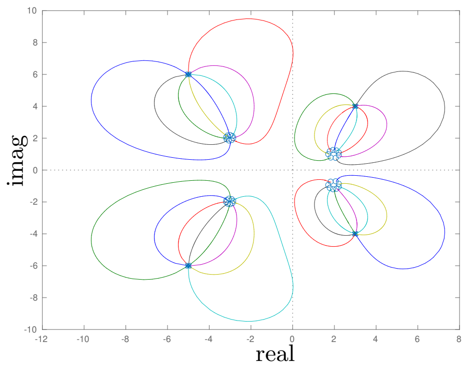


$$H(s) = \frac{(s-4)}{(s+5)^{10}}$$

Eixo real: $(-\infty, 4]$, Número: $\eta = 10 - 1 = 9$

Ângulos: $\pm\frac{\pi}{9}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{9}, \pm\frac{7\pi}{9}, \pi$ Encontro: $\frac{1}{9}(-5-5-5-5-5-5-5-5-5-5-(4)) = -\frac{54}{9} = -6$

10ª Questão: Determine o número de polos e zeros do lugar das raízes mostrado na figura ao lado (justifique a resposta).



São 32 polos e 32 zeros, pois cada ramo do lugar das raízes vai de um polo para um zero (grau relativo é zero, não há assíntotas). Pode-se notar que são 4 polos distintos, cada qual com multiplicidade 8, e 4 zeros distintos com multiplicidade 8 cada.