1ª Questão: Determine a solução forçada para a entrada $x[n] = 2$ do sistema linear discreto invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

$$h[n] = 5n(-2)^n u[n]$$

$$H(z) = \frac{-10z}{(z+2)^2}, \quad y_f[n] = 2H(1) = -\frac{20}{9}$$

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{-z^2 - 7z}{(z+1)(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2$$

$$X(z) = \frac{-z^2 - 7z}{(z+1)(z-2)} = \frac{2z}{z+1} - \frac{3z}{z-2}, \quad x[n] = 2(-1)^n u[n] + 3(2)^n u[-n-1]$$

3ª Questão: Determine, para uma sequência cuja transformada Z é dada por

$$Y(z) = \frac{4z^3 + 16z^2 - 38z}{(z-1)(z+2)(z-4)}$$

a) $y[0]$ para $\Omega_y = \{|z| > 4\}$ b) $y[-1]$ para $\Omega_y = \{|z| < 1\}$

$$Y(z) = \frac{4z^3 + 16z^2 - 38z}{z^3 - 3z^2 - 6z + 8} \quad \Rightarrow \quad y[0] = 4,\ y[-1] = \frac{-38}{8} = \frac{-19}{4}$$

4ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-2z}{z^2 - 3},\ |z| < \sqrt{3}$$

Determine:
a) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$

$$\Pr\{\mathbb{W} = 1\} = \left(\frac{d}{dz}\right) \frac{-2z}{z^2-3}\Big|_{z=0} = \left(\frac{-2}{z^2-3} + \frac{2z(2z)}{(z^2-3)^2}\right)\Big|_{z=0} = \frac{2z^2+6}{(z^2-3)^2}\Big|_{z=0} = \frac{2}{3}$$

b) A média $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{-2z}{z^2-3}\right)\Big|_{z=1} = \frac{2z^3+6z}{(z^2-3)^2}\Big|_{z=1} = \frac{8}{4} = 2$$

5ª Questão: a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = 6x[n]$$

b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

$$(p^2 + 3p + 2)y[n] = 6x[n], \quad H(z) = \frac{N(p)}{D(p)}\Big|_{p=z} = \frac{6}{z^2 + 3z + 2} = \frac{6}{(z+1)(z+2)}$$

$$H(z) = 3 + \frac{-6z}{z+1} + \frac{3z}{z+2}, \quad h[n] = 3\delta[n] + \big(3(-2)^n - 6(-1)^n\big)u[n]$$

6ª Questão: Determine: a) $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] - y[n+1] - 12y[n] = 0, \quad y[0] = 10, \; y[1] = 5$$

b) a solução $y[n]$

$$Y(z) = \frac{z^2 y[0] + zy[1] - zy[0]}{z^2 - z - 12} = \frac{5z}{z+3} + \frac{5z}{z-4}, \quad y[n] = 5((-3)^n + (4)^n)u[n]$$

7ª Questão: a) Determine a solução forçada para

$$y[n+1] + 2y[n] = 10(-2)^n$$

$$(p+2)y[n] = 10(-2)^n, \quad \bar{D}(p) = (p+2), \; y_f[n] = -5n(-2)^n$$

b) Determine a solução para $y[0] = 5$

$$y[n] = -5n(-2)^n + 5(-2)^n$$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (1 + n + n^2)(-2)^n$$

$$\bar{D}(p) = (p+2)^3, \quad (p^3 + 6p^2 + 12p + 8)y[n] = 0, \; y[0] = 1, \; y[1] = -6, y[2] = 28$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (v_1+1)(v_2-3) - 5x = v_1 v_2 - 3v_1 + v_2 - 3 - 5x \\ \dot{v}_2 &= (v_1-3)(v_2+1) + 2x^2 = v_1 v_2 - 3v_2 + v_1 - 3 + 2x^2 \end{aligned}$$

$$(-1,-1), \quad (3,3)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} v_2 - 3 & v_1 + 1 \\ v_2 + 1 & v_1 - 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 4x \end{bmatrix}$$

$$(-1,-1): \; \dot{v} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ assint. estável - autovalores com parte real negativa,}$$

$$(3,3): \; \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ instável, autovalor com parte real positiva}$$

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\ddddot{y} - 7\dddot{y} + 5\ddot{y} - 4\dot{y} + 2y = -2\ddddot{x} + 2\dddot{x} - \ddot{x} + 2\dot{x} - x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & -12 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$