1ª Questão: Determine $V(s)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V(s) = (sI - A)^{-1} v(0) = \begin{bmatrix} s+1 & -4 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \begin{bmatrix} s+1 & 4 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+5 \\ s+2 \end{bmatrix}$$

2ª Questão: Determine: a) J (forma de Jordan); b) Q tal que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda + 5)^3$$

$$A - (-5)I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \text{rank} = 1, \ \text{dimensão do espaço nulo} = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow J = \text{diag}(J_2(-5), J_1(-5)) = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & d & a \\ 0 & e & b \\ a & a+d & a \end{bmatrix}, \ b \neq a \neq 0$$

3ª Questão: Determine um sistema linear homogêneo $\dot{v} = Av$, $y = cv$ e a condição inicial $v(0)$ (i.e., matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vetores $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $v(0) \in \mathbb{R}^n$) que produzem como solução

$$y(t) = (2t+3)\exp(-2t)\cos(4t) + (5t+6)\exp(-2t)\text{sen}(4t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(At) = \exp(-2t) \begin{bmatrix} \cos(4t) & -\text{sen}(4t) & t\cos(4t) & -t\,\text{sen}(4t) \\ \text{sen}(4t) & \cos(4t) & t\,\text{sen}(4t) & t\cos(4t) \\ 0 & 0 & \cos(4t) & -\text{sen}(4t) \\ 0 & 0 & \text{sen}(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Determine α_0 e α_1 tais que

$$A^{-3} = \alpha_0 I + \alpha_1 A, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+2 & 2 \\ -2 & \lambda-3 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

$$(-1)^{-3} = \alpha_0 - \alpha_1, \ 2^{-3} = \alpha_0 + 2\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{-5}{8}, \ \alpha_1 = \frac{3}{8}$$

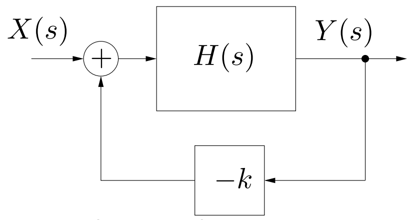
5ª Questão: Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta+1 & -\alpha \\ -\alpha^2+\beta+1 & \alpha\beta-\alpha & -\alpha^2+\beta+1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Obsv}(A, c)) = 2\alpha^2(\beta - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \ \beta = 1$$

6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 10s + 16}$$

$$D(s) = s^3 + ks^2 + (10-k)s + 16 \;\;, \quad 2 < k < 8$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados $\mathbb{R}^2$ no qual a função $\psi(v_1, v_2)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não linear dado por

$$\begin{aligned}
\dot{v}_1 &= v_1^3 v_2^2 - 2v_1^2 v_2^2 - 3v_1 v_2^2 \\
\dot{v}_2 &= v_1^2 v_2^3 - 3v_1^2 v_2^2 - 10v_1^2 v_2
\end{aligned}$$

Tem-se $\psi(v_1, v_2) > 0$, $\forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ e

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(v_1, v_2) &= v_1 \dot{v}_1 + v_2 \dot{v}_2 \\
&= v_1(v_1^3 v_2^2 - 2v_1^2 v_2^2 - 3v_1 v_2^2) + v_2(v_1^2 v_2^3 - 3v_1^2 v_2^2 - 10v_1^2 v_2) \\
&= v_1^2 v_2^2(v_1^2 - 2v_1 - 3) + v_1^2 v_2^2(v_2^2 - 3v_2 - 10) < 0, \quad \forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)
\end{aligned}$$

Se $(v_1, v_2) \in \Omega = \{(v_1, v_2) : \underbrace{(v_1^2 - 2v_1 - 3 < 0)}_{(v_1+1)(v_1-3)<0} \;\; \& \;\; \underbrace{(v_2^2 - 3v_2 - 10) < 0}_{(v_2+2)(v_2-5)<0}\}$

$$\Longrightarrow \quad \Omega = \{(v_1, v_2) : -1 < v_1 < 3, -2 < v_2 < 5\}$$

8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

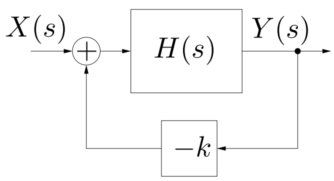
a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Instável (parte real nula — forma de Jordan de tamanho não mínimo)

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Estável (parte real nula em blocos modais de Jordan de tamanho mínimo)

9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para

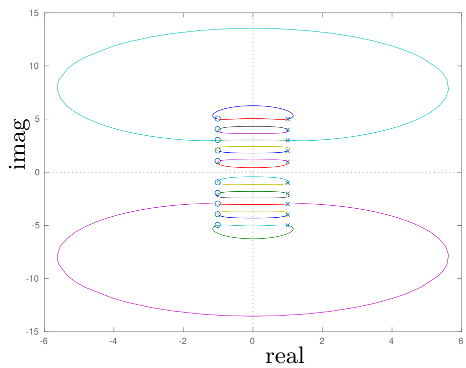


$$H(s) = \frac{s - 8}{(s + 4)^{13}}$$

Eixo real: $[-4, 8]$, Número: $\eta = 13 - 1 = 12$

Ângulos: $\pm\frac{\pi}{12}, \pm\frac{3\pi}{12}, \pm\frac{5\pi}{12}, \pm\frac{7\pi}{12}, \pm\frac{9\pi}{12}, \pm\frac{11\pi}{12},$ Encontro: $\frac{1}{12}(13 \times (-4) - (8)) = -\frac{60}{12} = -5$

10ª Questão: Determine o número de polos e zeros do lugar das raízes mostrado na figura ao lado (justifique a resposta).



São 20 polos e 20 zeros, pois cada ramo do lugar das raízes vai de um polo para um zero (grau relativo é zero, não há assíntotas). Pode-se notar que são 10 polos duplos distintos e 10 zeros duplos distintos.