1ª Questão: Determine a solução forçada para a entrada $x[n] = 3^n$ do sistema linear discreto invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

$$h[n] = \frac{1}{2}n(2)^n u[n]$$

$$H(z) = \frac{z}{(z-2)^2}, \quad y_f[n] = H(3)3^n = 3^{n+1}$$

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{-7z^3 - 3z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2$$

$$X(z) = \frac{-7z^3 - 3z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2)} = \frac{2z}{(z+1)^2} - \frac{3z}{z+1} - \frac{4z}{z-2}, \quad x[n] = (2n(-1)^{n-1} - 3(-1)^n)u[n] + 4(2)^n u[-n-1]$$

3ª Questão: Determine, para uma sequência cuja transformada Z é dada por

$$Y(z) = \frac{5z^4 - 3z^3 - 6z^2 - 15z}{2(z^2-1)(z^2-4)}$$

a) $y[0]$ para $\Omega_y = \{|z| > 4\}$ b) $y[-1]$ para $\Omega_y = \{|z| < 1\}$

$$Y(z) = \frac{5z^4 - 3z^3 - 6z^2 - 15z}{2z^4 - 10z^2 + 8)} \quad \Rightarrow \quad y[0] = 5/2, \; y[-1] = \frac{-15}{8}$$

4ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-4z}{z^2-5}, \; |z| < \sqrt{5}$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$

$$\Pr\{\mathbb{W} = 1\} = \left(\frac{d}{dz}\right)\frac{-4z}{z^2-5}\Big|_{z=0} = \left(\frac{-4}{z^2-5} + \frac{4z(2z)}{(z^2-5)^2}\right)\Big|_{z=0} = \frac{4z^2+20}{(z^2-5)^2}\Big|_{z=0} = \frac{4}{5}$$

b) A média $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{-4z}{z^2-5}\right)\Big|_{z=1} = \frac{4z^3+20z}{(z^2-5)^2}\Big|_{z=1} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

5ª Questão: a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] + y[n+1] - 12y[n] = -26x[n+1] + 36x[n]$$

b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

$$(p^2 + p - 12)y[n] = (-26p + 36)x[n], \quad H(z) = \frac{N(p)}{D(p)}\Big|_{p=z} = \frac{-26z+36}{z^2+z-12} = \frac{-26z+36}{(z-3)(z+4)}$$

$$H(z) = -3 - \frac{2z}{z-3} + \frac{5z}{z+4}, \quad h[n] = -3\delta[n] - 2(3)^n u[n] + 5(-4)^n u[n]$$

6ª Questão: Determine a) $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] - y[n+1] - 30y[n] = 0, \quad y[0] = 110, \; y[1] = 0$$

b) a solução $y[n]$

$$Y(z) = \frac{z^2y[0] + zy[1] - zy[0]}{z^2 - z - 30} = \frac{60z}{z+5} + \frac{50z}{z-6}, \quad y[n] = (60(-5)^n + 50(6)^n)u[n]$$

7ª Questão: a) Determine a solução forçada para

$$y[n+1] + 5y[n] = 10(-5)^n$$

$$(p+5)y[n] = 10(-5)^n, \quad \bar{D}(p) = (p+5), \; y_f[n] = -2n(-5)^n$$

b) Determine a solução para $y[0] = -4$

$$y[n] = -2n(-5)^n - 4(-5)^n$$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (n+1)(n+2)(-3)^n$$

$$y[n] = (n^2 + 3n + 2)(-3)^n$$

$$\bar{D}(p) = (p+3)^3, \quad (p^3 + 9p^2 + 27p + 27)y[n] = 0, \; y[0] = 2, y[1] = -18, y[2] = 108$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1(v_2+5) + 4x^2 = v_1v_2 + 5v_1 + 4x^2 \\ \dot{v}_2 &= -(v_1-5)v_2 + 2x = -v_1v_2 + 5v_2 + 2x \end{aligned}$$

$$(0,0), \quad (5,-5)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} v_2+5 & v_1 \\ -v_2 & -v_1+5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(0,0): \; \dot{v} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ instável, autovalor com parte real positiva,}$$

$$(5,-5): \; \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ instável, autovalor com parte real positiva}$$

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\ddddot{y} + \dddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + y = 2\ddddot{x} + 3\dddot{x} + 4\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$