

Nome:

RA:

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: Determine a solução forçada para a entrada $x[n] = 3^n$ do sistema linear discreto invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

$$h[n] = \frac{1}{2}n(2)^n u[n]$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{-7z^3 - 3z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2$$

3ª Questão: Determine, para uma sequência cuja transformada Z é dada por

$$Y(z) = \frac{5z^4 - 3z^3 - 6z^2 - 15z}{2(z^2 - 1)(z^2 - 4)}$$

a) $y[0]$ para $\Omega_y = \{|z| > 4\}$ b) $y[-1]$ para $\Omega_y = \{|z| < 1\}$

4ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta \mathbb{X} é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-4z}{z^2 - 5}, \quad |z| < \sqrt{5}$$

Determine:

a) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$

b) A média $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

5ª Questão: a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] + y[n+1] - 12y[n] = -26x[n+1] + 36x[n]$$

b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

6ª Questão: Determine a) $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] - y[n+1] - 30y[n] = 0, \quad y[0] = 110, \quad y[1] = 0$$

b) a solução $y[n]$

7ª Questão: a) Determine a solução forçada para

$$y[n+1] + 5y[n] = 10(-5)^n$$

b) Determine a solução para $y[0] = -4$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (n + 1)(n + 2)(-3)^n$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\dot{v}_1 = v_1(v_2 + 5) + 4x^2 = v_1v_2 + 5v_1 + 4x^2$$

$$\dot{v}_2 = -(v_1 - 5)v_2 + 2x = -v_1v_2 + 5v_2 + 2x$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + y = 2\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x + 5\dot{x} + 6x$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}$, $|z| > |a|$, $\mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \frac{z}{z-a}$, $|z| < |a|$

$\mathcal{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = \frac{z}{(z-a)^2}$, $|z| > |a|$, $\mathcal{Z}\{-na^{n-1}u[-n]\} = \frac{z}{(z-a)^2}$, $|z| < |a|$

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z)$, $z \in \Omega_x \Leftrightarrow \mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1})$, $z^{-1} \in \Omega_x$, $\mathcal{Z}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \mathcal{Z}\{x_1[n]\}\mathcal{Z}\{x_2[n]\}$

$m \in \mathbb{Z}_+$: $\mathcal{Z}\{n^m x[n]\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^m x[k] = \mathcal{Z}\{n^m x[n]\} \Big|_{z=1}$, $1 \in \Omega_x$

$\mathcal{Z}\{y[n] = x[n-m]u[n-m]\} = z^{-m} \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\}$, $\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m \left(\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\right)$

$\mathcal{Z}\left\{\binom{n}{m} a^{n-m} u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}$, $|z| > |a|$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3}$, $|z| > |a|$

$\mathcal{Z}\left\{\binom{n+m}{m} a^n u[n]\right\} = (1-az^{-1})^{-(m+1)} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$, $m \in \mathbb{N}$, $|z| > |a|$

$x[0] = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} X(z)$, Ω_x exterior de um círculo, $x[+\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$, $|z| > \rho$, $0 < \rho \leq 1$

Transf. Z e Probabilidade: $G_{\mathbb{X}}(z) = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \mathcal{Z}\{p[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pr\{\mathbb{X} = k\}z^k$

$G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} G_{\mathbb{X}}(z) \Big|_{z=0} z^n$, \mathbb{X}, \mathbb{Y} var. aleat. independentes $\Rightarrow \mathcal{E}\{z^{(\mathbb{X}+a\mathbb{Y})}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{(z^a)^{\mathbb{Y}}\}$

$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k kp[k]$, $\sigma_{\mathbb{X}}^2 = \mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathcal{E}\{\mathbb{X}\}^2$, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}^m\} = \left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathcal{Z}\{p[n]\} \Big|_{z=1}$

Eq. dif. (Transf. Z): $\mathcal{Z}\{y[n+2]u[n]\} = z^2 Y(z) - z^2 y[0] - zy[1]$, $\mathcal{Z}\{y[n+1]u[n]\} = zY(z) - zy[0]$

Eq. dif. (Coef. a determinar): $py[n] \triangleq y[n+1]$

degrau: $u[n]$, impulso: $\delta[n]$, $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$, $u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$

$D(p)y[n] = 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=1}^m a_k f_k[n]$, $f_k[n]$ modos próprios (considerando multiplicidades)

Autofunção (SLIT): $x[n] = z^n \Rightarrow y_f[n] = H(z)z^n$

λ : raiz de multiplicidade r de $D(\lambda) \Rightarrow \lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{r-1}\lambda^n$ (r modos próprios)

$D(p)y[n] = N(p)x[n]$, se $\bar{D}(p)x[n] = 0$ então $\bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$

Solução forçada: $y[n] = y_h[n] + y_f[n] \Rightarrow D(p)y_f[n] = N(p)x[n]$, $D(p)y_h[n] = 0$

$y_f[n] = \sum_{k=1}^m b_k g_k[n]$, $g_k[n]$ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio: \bar{v} tais que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x} = \text{cte}$. Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}$, $B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}$, $C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}$, $D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}$

$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} + \beta_3$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2]$, $d = [\beta_3]$

$\dot{v} = Av + bx$, $y = cv + dx$, $\frac{N(p)}{D(p)} = c(pI - A)^{-1}b + d = b'(pI - A')^{-1}c' + d$, $p = \frac{d}{dt}$

$v = T\hat{v} \Rightarrow \hat{A} = T^{-1}AT$, $\hat{b} = T^{-1}b$, $\hat{c} = cT$, T não singular