Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{z^2 - 13z}{(z+2)(z-3)}, \quad 2 < |z| < 3$$

2ª Questão: Determine o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n2^{-n} + 4^{-n}\right)$

3ª Questão: Determine, para as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias discretas independentes $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ cujas transformadas Z são dadas respectivamente por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-4}{z-5}, \ |z| < 5, \quad \mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{-3}{2z-5}, \ |z| < 5/2$$

a) A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{W} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$
b) $\Pr\{\mathbb{W} = 0\}$ c) $\mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = \displaystyle\sum_k k \Pr\{\mathbb{W} = k\}$

4ª Questão: a) Determine $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução causal $y[n]$ da equação a diferenças $y[n+2] + y[n+1] - 2y[n] = 0$ em termos de $y[0]$ e $y[1]$.
b) Determine a solução $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ para $y[0] = 1, y[1] = 4$

5ª Questão: a) Determine a solução forçada $y_f[n]$ da equação a diferenças

$$(p-2)(p-4)y[n] = (p^2 - 6p + 8)y[n] = y[n+2] - 6y[n+1] + 8y[n] = 2^{n+3}$$

b) Determine a solução para $y[0] = 1,\ y[1] = 10$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -2(v_1+2)v_2 - 5x = -2v_1v_2 - 4v_2 - 5x \\ \dot{v}_2 &= 5(v_2+3)v_1 + x = 5v_1v_2 + 15v_1 + x \end{aligned}$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

7ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 6\dot{y} - 5y = 2\dddot{x} - 10\ddot{x} + 15\dot{x} - 9x$$

8ª Questão: Determine $y(t)$ para o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} v$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função
$y(t) = t\cos(3t) + 2t \ \mathrm{sen}(3t)$

10ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = \lambda^3$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \dfrac{z}{z-a} \ , \ |z| > |a| \quad , \quad \mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \dfrac{z}{z-a} \ , \ |z| < |a|$

$$\mathcal{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = \frac{z}{(z-a)^2} \ , \ |z| > |a| \quad , \quad \mathcal{Z}\{-na^{n-1}u[-n]\} = \frac{z}{(z-a)^2} \ , \ |z| < |a|$$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z), z \in \Omega_x \ \Leftrightarrow \ \mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1}), z^{-1} \in \Omega_x \quad , \quad \mathcal{Z}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \mathcal{Z}\{x_1[n]\}\mathcal{Z}\{x_2[n]\}$$

$$\mathcal{Z}\{n^m x[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z) \quad , \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^m x[k] = \mathcal{Z}\{n^m x[n]\}\Big|_{z=1} \ , \ 1 \in \Omega_x \ , \ m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{Z}\{y[n] = x[n-m]u[n-m]\} = z^{-m}\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+ \ , \ \Omega_y = \Omega_x$$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\Big(\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\Big) \ , \ m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \ , \ |z| > |a| \ , \ m \in \mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2} \ , \ |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^n u[n]\right\} = (1-az^{-1})^{-(m+1)} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}} \ , \ m \in \mathbb{N} \ , \ |z| > |a|$$

$$x[0] = \lim_{|z| \to +\infty} X(z) \ , \ \Omega_x \text{ exterior de um círculo} \quad , \quad x[+\infty] = \lim_{z \to 1}(z-1)X(z) \ , \ |z| > \rho \ , \ 0 < \rho \leq 1$$

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \mathcal{Z}\{p[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pr\{\mathbb{X} = k\}z^k, \quad G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}G_{\mathbb{X}}(z)\Big|_{z=0} z^n$$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k kp[k] \ , \quad \sigma_{\mathbb{X}}^2 = \mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathcal{E}\{\mathbb{X}\}^2 \ , \quad \mathcal{E}\{\mathbb{X}^m\} = \left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathcal{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1}$$

$\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ var. aleatórias independentes $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}\{z^{(\mathbb{X}+\mathbb{Y})}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\}$

Laplace (funções causais): $\mathcal{L}\Big\{\dfrac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\Big\} = \dfrac{1}{(s+a)^{m+1}}$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}\ ,\ \mathcal{L}\{\text{sen}(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$$

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio: $\bar{v}$ tais que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x} =$cte. Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}\ ,\ B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}\ ,\ C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}\ ,\ D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}$$

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} + \beta_3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{v} = Av + bx\ ,\ y = cv + dx\ ,\ \frac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1}c' + d, \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = T^{-1}AT,\ \hat{b} = T^{-1}b, \hat{c} = cT \quad , \quad T \text{ não singular}$$

$$y(t) = c\exp(At)v_0 + c\big(\exp(At)u(t)\big) * (bx(t)) + dx(t),\ Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v_0 + \big(c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b + d\big)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton:} \quad \Delta(\lambda) = \det(s\mathrm{I} - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i\ ,\ \Delta(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i\ ,\ f\big(\text{diag}(A_1, \ldots, A_N)\big) = \text{diag}\big(f(A_1), \ldots, f(A_N)\big)$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma \end{bmatrix}\ ,\ f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

$$\text{Forma modal: } M = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix},\ \Delta(\lambda) = (\lambda - \sigma)^2 + \omega^2,$$

$$\exp(Mt) = \exp(\sigma t)\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \quad \text{Forma modal de Jordan: } \begin{bmatrix} M & \mathrm{I} & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{bmatrix}$$

Forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\nu(M_\lambda) = n - \text{rank}(M_\lambda)$ (dimensão do espaço nulo de $M_\lambda = A - \lambda\mathrm{I}$):

1) Para cada λ (multiplicidade algébrica n_λ), compute $M_\lambda = (A - \lambda\mathrm{I})$ e a dimensão r_λ do espaço nulo de M_λ. O número de blocos de Jordan associados a λ é igual a r_λ e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a n_λ. Note que r_λ é a multiplicidade geométrica de λ, ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a λ, $1 \leq r_\lambda \leq n_\lambda$.

$$\dot{v} = Av + bx\ ,\ y = cv + dx, v(0) \quad , \quad \text{para } x \text{ solução de } x = \bar{c}\bar{v}\ ,\ \dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \bar{v}(0)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Sistema autônomo aumentado: } \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$