1ª Questão: Defina observabilidade para sistemas lineares invariantes no tempo.
SLIT são observáveis se existir $\tau > 0$ tal que o conhecimento da saída $y(t)$ para todo $t \in [0, \tau]$ é suficiente para determinar a condição inicial $v(0)$.

2ª Questão: Determine os autovalores associados aos modos observáveis e não observáveis (justifique) para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} v, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Autovalores: 2 (observável) e 1 (não observável), pois

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \ rank \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 \text{ (observ.)}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ rank \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 \text{ (não observ.)}$$

3ª Questão: O sistema linear invariante no tempo dado abaixo: a) é controlável? b) é observável? Justifique a resposta.

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

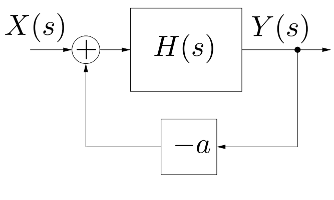
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

É controlável, pois só há um bloco de Jordan por autovalor e o elemento de b correspondente à última linha de cada bloco é diferente de zero.
Não é observável, pois embora só exista um bloco de Jordan por autovalor, há elementos de c correspondentes à primeira coluna de cada bloco iguais a zero (bloco correspondente ao autovalor 2)

4ª Questão: Para o sistema linear invariante no tempo abaixo, determine os valores de α e β (reais) para que o sistema seja controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} x \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \neq -\beta \neq 0, \quad 2\alpha \neq -\beta \neq 0$$

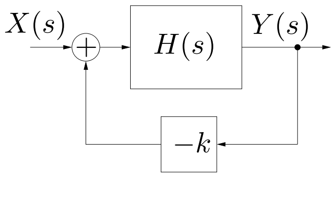
5ª Questão: Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro a, para $a = 1$



$$H(s) = \frac{10a}{s^2 + as + 2a}$$

$$G(s) = \frac{10a}{s^2 + as + 2a + 10a^2} \ , \ \frac{\partial G}{\partial a} \frac{a}{G} = \frac{s^2 - 10a^2}{s^2 + as + 2a + 10a^2} \Big|_{s=0} = \frac{-10a^2}{2a + 10a^2} \Big|_{a=1} = -10/12 = -5/6$$

6ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{2s^2 - 2s}{s^3 + 6s + 8}$$

$$D(s) = s^3 + 2ks^2 + (6 - 2k)s + 8 \ , \quad 1 < k < 2$$

7ª Questão: O sistema linear invariante no tempo dado abaixo é estável, assintoticamente estável ou instável? Justifique

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} v$$

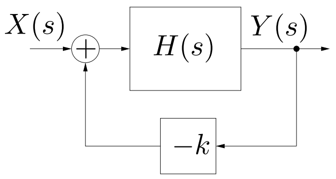
Instável, pois possui um bloco de Jordan de tamanho maior de que um (autovalor nulo)

8ª Questão: Conclua (com justificativa) sobre a estabilidade assintótica do sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av$ resolvendo a equação de Lyapunov $A'P + PA + Q = 0$ (A' é o transposto de A) para

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 100 & -14 \\ -14 & 32 \end{bmatrix} > 0 \qquad \Longrightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Assintoticamente estável, pois a solução é única, simétrica e definida positiva.

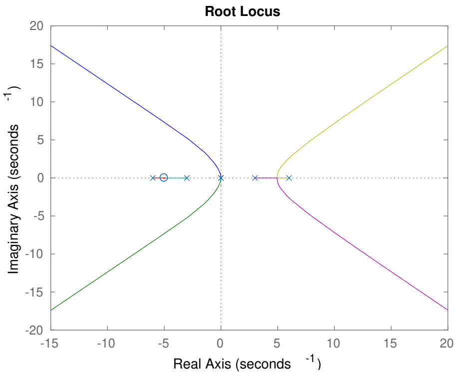
9ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com



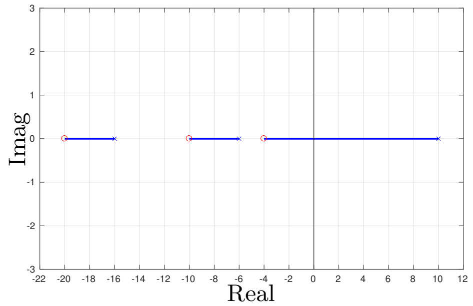
$$H(s) = \frac{(s+5)^2}{(s+6)(s+3)s^2(s-3)(s-6)}$$

Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes para o sistema realimentado (eixo real e assíntotas), determinando o ponto de encontro das assíntotas

$$\eta = 4, \quad \frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4} \quad (-6 - 3 + 0 + 3 + 6 - (-5 - 5))/4 = 2.5$$



10ª Questão: No lugar das raízes da figura (polos em 10, −6 e −16, zeros em −4, −10 e −20), determine o valor de k no cruzamento com o eixo imaginário.



Cruzamento com o eixo imaginário em $s = 0$, com valor $k = \dfrac{|10||-6||-16|}{|-4||-10||-20|} = \dfrac{6}{5}$