

Nome: .....

RA: .....

**Obs.:** Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

**1ª Questão:** Defina observabilidade para sistemas lineares invariantes no tempo.

**2ª Questão:** Determine os autovalores associados aos modos observáveis e não observáveis (justifique) para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad y = [1 \quad -1] v, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

**3ª Questão:** O sistema linear invariante no tempo dado abaixo: a) é controlável? b) é observável? Justifique a resposta.

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = [1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1] v$$

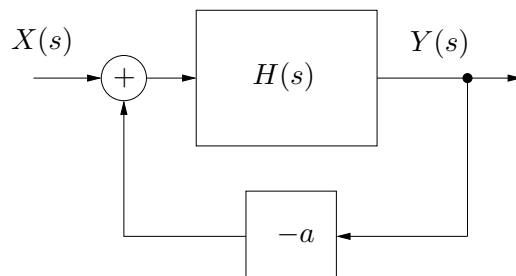
**4ª Questão:** Para o sistema linear invariante no tempo abaixo, determine os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  (reais) para que o sistema seja controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} x$$



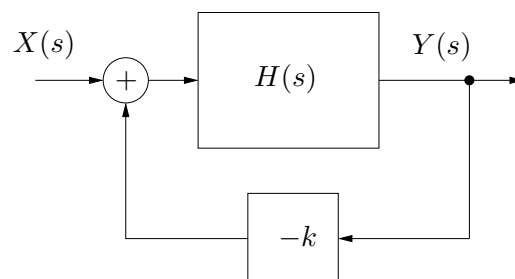
**5ª Questão:** Determine a sensibilidade do ganho DC ( $s = 0$ ) do sistema em malha fechada em função do parâmetro  $a$ , para  $a = 1$

$$H(s) = \frac{10a}{s^2 + as + 2a}$$



**6ª Questão:** Determine o intervalo para  $k$  tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{2s^2 - 2s}{s^3 + 6s + 8}$$



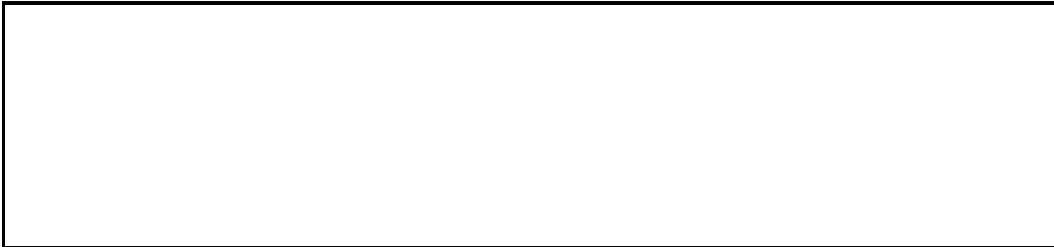
**7ª Questão:** O sistema linear invariante no tempo dado abaixo é estável, assintoticamente estável ou instável? Justifique

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} v$$



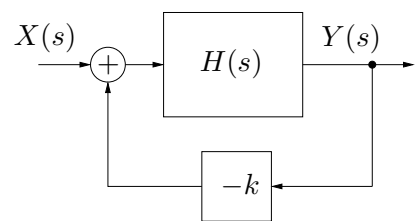
**8ª Questão:** Conclua (com justificativa) sobre a estabilidade assintótica do sistema linear invariante no tempo  $\dot{v} = Av$  resolvendo a equação de Lyapunov  $A'P + PA + Q = 0$  ( $A'$  é o transposto de  $A$ ) para

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 100 & -14 \\ -14 & 32 \end{bmatrix} > 0$$



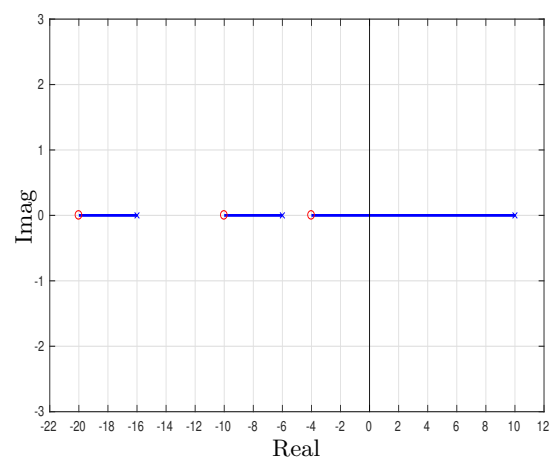
**9ª Questão:** Considere o sistema realimentado mostrado na figura com

$$H(s) = \frac{(s+5)^2}{(s+6)(s+3)s^2(s-3)(s-6)}$$



Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes para o sistema realimentado (eixo real e assíntotas), determinando o ponto de encontro das assíntotas

**10ª Questão:** No lugar das raízes da figura (polos em 10,  $-6$  e  $-16$ , zeros em  $-4$ ,  $-10$  e  $-20$ ), determine o valor de  $k$  no cruzamento com o eixo imaginário.



$M_{dB}(\omega) = 20 \log M(\omega)$  sendo log o logaritmo na base 10

**Lyapunov:** Considere o sistema  $\dot{v} = f(v)$ . O ponto de equilíbrio  $\bar{v} = 0$  é assintoticamente estável se existir um domínio  $\Omega$  contendo a origem e uma função escalar  $\psi(v)$  diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(v) > 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\} \quad \text{e} \quad \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\}$$

**Lyapunov (SLIT):** A solução da equação de Lyapunov  $A'P + PA = -Q, \forall Q = Q' > 0$ , é única, simétrica e definida positiva SSE todos os autovalores da matriz  $A$  tiverem parte real negativa ( $\equiv$  assintoticamente estável)

**Controlabilidade e Observabilidade:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Controlável se e somente se:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} = n, \quad \text{ou} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} A - \lambda I & b \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda \text{ autovalor}$$

Observável se e somente se:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} = n, \quad \text{ou} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ c \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda \text{ autovalor}$$

Decomposição canônica:  $\bar{v} = Pv$

Se  $\text{rank}$  de  $\text{Ctrb}(A, b) = r < n$ ,  $P^{-1}$  é formada por colunas de 1 a  $r$  LI de  $\text{Ctrb}(A, b)$  mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x, \quad y = [\bar{c}_c \quad \bar{c}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se  $\text{rank}$  de  $\text{Obsv}(A, c) = r < n$ ,  $P$  é formada por linhas de 1 a  $r$  LI de  $\text{Obsv}(A, c)$  mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x, \quad y = [\bar{c}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Sensibilidade de  $f(x, y)$  em relação a  $x$ :  $\frac{x}{f} \frac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes:  $1 + kH(s) = 0, H(s) = N(s)/D(s) \Rightarrow D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^m \alpha_r s^r, \quad \alpha_m = 1, \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os polos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente,  $k = 0$  e  $k \rightarrow +\infty$ .

3) Condição de fase:  $\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^m \phi_r(s) = \pi$

sendo  $\phi_r(s) = \angle(s - \lambda_r)$  o ângulo do vetor do pólo  $\lambda_r$  até o ponto  $s$  do lugar das raízes e  $\varphi_r(s) = \angle(s - \gamma_r)$  o ângulo do vetor do zero  $\gamma_r$  até o ponto  $s$  do lugar das raízes.

4) Condição de módulo:  $k = \left( \prod_{r=1}^m |s - \lambda_r| \right) / \left( \prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r| \right)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de polos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos polos:  $\phi_i(s) \Big|_{s \approx \lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^m \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros:  $\varphi_i(s) \Big|_{s \approx \gamma_i} = \sum_{r=1}^m \phi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas  $\eta$  é igual ao número de zeros no infinito, isto é,  $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas:  $\frac{\pi(1 + 2r)}{m - \ell}, \quad \beta_{\ell} > 0, \quad r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ( $\eta \geq 2$ ): no eixo real no ponto  $\frac{1}{\eta} \left( \sum_{r=1}^m \text{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \text{Re}(\gamma_r) \right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação  $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em  $s = \pm j\omega$ , com  $\omega \geq 0$ , solução de  $D(s) + kN(s) = 0$