1ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{-2z^2 + 22z}{(z-3)(z+5)}, \quad 3 < |z| < 5$$

$$X(z) = \frac{-2z^2 + 22z}{(z-3)(z+5)} = X(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{4z}{z+5}, \quad x[n] = 2(3)^n u[n] + 4(-5)^n u[-n-1]$$

2ª Questão: Determine o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 3^{-n}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 3^{-n}\right) = \mathcal{Z}\Big\{n^2 3^{-n} u[n]\Big\}\Big|_{z=1} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 \mathcal{Z}\Big\{3^{-n} u[n]\Big\}\Big|_{z=1} = \frac{(1/3)^2 z + (1/3) z^2}{(z-1/3)^3}\Big|_{z=1} = \frac{3}{2}$$

3ª Questão: Determine, para as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias discretas independentes $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ cujas transformadas Z são dadas respectivamente por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-7}{3z-10}, \ |z| < 10/3, \quad \mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{-2}{3z-5}, \ |z| < 5/3$$

a) A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{W} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{W}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \frac{14}{(3z-10)(3z-5)} = \frac{14}{9z^2 - 45z + 50}, \ |z| < 5/3$$

b) $\Pr\{\mathbb{W} = 0\} = 7/25$

c) $\displaystyle\mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{W} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\frac{14}{9z^2 - 45z + 50}\Big|_{z=1} = \frac{-14(18z - 45)}{(9z^2 - 45z + 50)^2} = \frac{27}{14}$

4ª Questão: a) Determine $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução (causal) $y[n]$ da equação a diferenças $y[n+2] - y[n+1] - 2y[n] = 0$ em termos de $y[0]$ e $y[1]$.
b) Determine a solução $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ para $y[0] = 5, y[1] = 1$

$$Y(z) = \frac{z^2 y[0] + z(y[1] - y[0])}{(z+1)(z-2)}, |z| > 2 \quad y[n] = \big(3(-1)^n + 2(2)^n\big)u[n]$$

5ª Questão: a) Determine a solução forçada $y_f[n]$ da equação a diferenças

$$(p-1)(p-2)y[n] = (p^2 - 3p + 2)y[n] = y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = 10n$$

b) Determine a solução para $y[0] = 10, \ y[1] = 20$

$$y_f[n] = -5(n + n^2), \quad y[n] = -5(n + n^2) - 10(1)^n + 20(2)^n$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema para $x = 0$

$$\dot{v}_1 = 3(v_1 - 1)v_2 + 5x = 3v_1v_2 - 3v_2 + 5x$$
$$\dot{v}_2 = 2(v_2 + 2)v_1 + 3x^2 = 2v_1v_2 + 4v_1 + 3x^2$$

$$(0, 0),\ \ (1, -2)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$A = \begin{bmatrix} 3v_2 & 3v_1 - 3 \\ 2v_2 + 4 & 2v_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$(0, 0) : A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1, -2) : A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} + 9\ddot{y} - 7\dot{y} + 4y = 4\dddot{x} + 39\ddot{x} - 29\dot{x} + 18x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & -9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

8ª Questão: Determine $y(t)$ para o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+7 & -1 \\ 12 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s - 4}{s^2 + 7s + 12} = \frac{12}{s+4} - \frac{10}{s+3}$$
$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(12\exp(-4t) - 10\exp(-3t)\big)u(t)$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}\ ,\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0\ ,\ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função
$y(t) = (t + 1)\exp(-2t)\cos(5t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 2 & -6 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A) = \lambda^3$$

$$J_3(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$