

Nome:

RA:

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{-2z^2 + 22z}{(z-3)(z+5)}, \quad 3 < |z| < 5$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: Determine o valor da soma $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 3^{-n}$

3ª Questão: Determine, para as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias discretas independentes \mathbb{X} e \mathbb{Y} cujas transformadas Z são dadas respectivamente por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-7}{3z-10}, \quad |z| < 10/3, \quad \mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{-2}{3z-5}, \quad |z| < 5/3$$

a) A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{W} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$

b) $\Pr\{\mathbb{W} = 0\}$ c) $\mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{W} = k\}$

4ª Questão: a) Determine $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução (causal) $y[n]$ da equação a diferenças $y[n+2] - y[n+1] - 2y[n] = 0$ em termos de $y[0]$ e $y[1]$.

b) Determine a solução $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ para $y[0] = 5, y[1] = 1$

5ª Questão: a) Determine a solução forçada $y_f[n]$ da equação a diferenças

$$(p-1)(p-2)y[n] = (p^2 - 3p + 2)y[n] = y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = 10n$$

b) Determine a solução para $y[0] = 10$, $y[1] = 20$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema para $x = 0$

$$\dot{v}_1 = 3(v_1 - 1)v_2 + 5x = 3v_1v_2 - 3v_2 + 5x$$

$$\dot{v}_2 = 2(v_2 + 2)v_1 + 3x^2 = 2v_1v_2 + 4v_1 + 3x^2$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio (\bar{v}_1, \bar{v}_2) tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

7ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 9\dot{y} - 7y = 4\ddot{x} + 39\dot{x} - 29x + 18x$$

8ª Questão: Determine $y(t)$ para o sistema linear

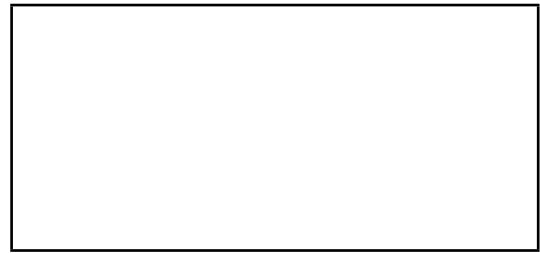
$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = [1 \quad 1] v$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{v} = \bar{A}v, \quad v(0) = \bar{v}_0, \quad y = \bar{c}v$$

que produza como saída a função

$$y(t) = (t + 1) \exp(-2t) \cos(5t)$$



10ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 2 & -6 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3$$



Transformada Z: $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|, \quad \mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$

$\mathcal{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|, \quad \mathcal{Z}\{-na^{n-1}u[-n]\} = \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| < |a|$

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z), z \in \Omega_x \Leftrightarrow \mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1}), z^{-1} \in \Omega_x, \quad \mathcal{Z}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \mathcal{Z}\{x_1[n]\} \mathcal{Z}\{x_2[n]\}$

$\mathcal{Z}\{n^m x[n]\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z), \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^m x[k] = \mathcal{Z}\{n^m x[n]\} \Big|_{z=1}, \quad 1 \in \Omega_x, \quad m \in \mathbb{N}$

$\mathcal{Z}\{y[n] = x[n-m]u[n-m]\} = z^{-m} \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \Omega_y = \Omega_x$

$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m \left(\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k} \right), \quad m \in \mathbb{Z}_+$

$\mathcal{Z}\left\{ \binom{n}{m} a^{n-m} u[n] \right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}, \quad |z| > |a|, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$

$\mathcal{Z}\left\{ \binom{n+m}{m} a^n u[n] \right\} = (1-az^{-1})^{-(m+1)} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad |z| > |a|$

$x[0] = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} X(z), \quad \Omega_x \text{ exterior de um círculo}, \quad x[+\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z), \quad |z| > \rho, \quad 0 < \rho \leq 1$

$G_{\mathbb{X}}(z) = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \mathcal{Z}\{p[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pr\{\mathbb{X} = k\}z^k, \quad G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} G_{\mathbb{X}}(z) \Big|_{z=0} z^n$

$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k kp[k], \quad \sigma_{\mathbb{X}}^2 = \mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathcal{E}\{\mathbb{X}\}^2, \quad \mathcal{E}\{\mathbb{X}^m\} = \left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathcal{Z}\{p[n]\} \Big|_{z=1}$

$\mathbb{X}, \mathbb{Y} \text{ var. aleatórias independentes} \Rightarrow \mathcal{E}\{z^{(\mathbb{X}+\mathbb{Y})}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} \mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\}$

Laplace (funções causais): $\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} \exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$$

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio: \bar{v} tais que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x} = \text{cte}$. Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right]_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j} \right]_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right]_{\bar{v}, \bar{x}}$$

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} + \beta_3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2], \quad d = [\beta_3]$$

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx, \quad \frac{N(p)}{D(p)} = c(pI - A)^{-1}b + d = b'(pI - A')^{-1}c' + d, \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$v = T\hat{v} \Rightarrow \hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{b} = T^{-1}b, \quad \hat{c} = cT, \quad T \text{ não singular}$$

$$y(t) = c \exp(At)v_0 + c(\exp(At)u(t)) * (bx(t)) + dx(t), \quad Y(s) = c(sI - A)^{-1}v_0 + (c(sI - A)^{-1}b + d)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton: } \Delta(\lambda) = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i, \quad \Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i, \quad f(\text{diag}(A_1, \dots, A_N)) = \text{diag}(f(A_1), \dots, f(A_N))$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma \end{bmatrix}, \quad f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \dots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \dots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

$$\text{Forma modal: } M = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - \sigma)^2 + \omega^2,$$

$$\exp(Mt) = \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \quad \text{Forma modal de Jordan: } \begin{bmatrix} M & I & \dots & 0 \\ 0 & M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M \end{bmatrix}$$

Forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\nu(M_\lambda) = n - \text{rank}(M_\lambda)$ (dimensão do espaço nulo de $M_\lambda = A - \lambda I$):

1) Para cada λ (multiplicidade algébrica n_λ), compute $M_\lambda = (A - \lambda I)$ e a dimensão r_λ do espaço nulo de M_λ . O número de blocos de Jordan associados a λ é igual a r_λ e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a n_λ . Note que r_λ é a multiplicidade geométrica de λ , ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a λ , $1 \leq r_\lambda \leq n_\lambda$.

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx, \quad v(0), \quad \text{para } x \text{ solução de } x = \bar{c}\bar{v}, \quad \dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0)$$

$$\Rightarrow \text{Sistema autônomo aumentado: } \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix}, \quad y = [c \quad d\bar{c}] \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$