EA616 — Análise Linear de Sistemas

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Preliminares

Conhecimentos Necessários

Tópicos principais

- Números complexos
- Representação de funções
- Integral e derivada
- Resolução de sistemas lineares de equações
- Frações parciais
- Matrizes e vetores

Notação e Informações Básicas

Número complexo

$$z = \rho \exp(j\theta), \quad \rho > 0, \qquad |z| = \rho, \quad \angle z = \theta$$

Teorema de Euler

$$\exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\mathrm{sen}(\theta) \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}$$

de Moivre

$$\exp(j\theta)^n = \exp(jn\theta) = \cos(n\theta) + j\mathrm{sen}(n\theta)$$

Notação e Informações Básicas

Degrau $u(t)$ e Gate $G_T(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}, \qquad G_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$$

Sinais $x(t)$ e $y(t)$ ortogonais

$$x(t) \perp y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = 0$$

sendo $y^*(t)$ o complexo conjugado de $y(t)$.

Função Sampling $\mathrm{Sa}(x)$

$$\mathrm{Sa}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}, \quad \mathrm{Sa}(0) = 1$$

Soma de exponenciais complexas

a) Reescreva a função abaixo: i) em termos de uma exponencial real vezes uma soma ponderada de seno e cosseno; ii) em termos de uma exponencial real vezes cosseno com defasagem.

$$x(t) = (3+j4)\exp\big((5+3j)t\big) + (3-j4)\exp\big((5-3j)t\big)$$

Soma de exponenciais complexas

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \exp(5t)\big(3\big(\exp(3jt)+\exp(-3jt)\big)+(j4)\big(\exp(3jt)-\exp(-3jt)\big)\big)\\
&= \exp(5t)\,(6\cos(3t)-8\mathrm{sen}(3t))
\end{aligned}
$$

Denotanto $\phi = \arctan(4/3)$,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 5\exp(j\phi)\exp(5t)\exp(3jt)+5\exp(-j\phi)\exp(5t)\exp(-3jt)\\
&= 10\exp(5t)\left(\frac{\exp\big(j(3t+\phi)\big)+\exp\big(-j(3t+\phi)\big)}{2}\right)\\
&= 10\exp(5t)\cos(3t+\phi)
\end{aligned}
$$

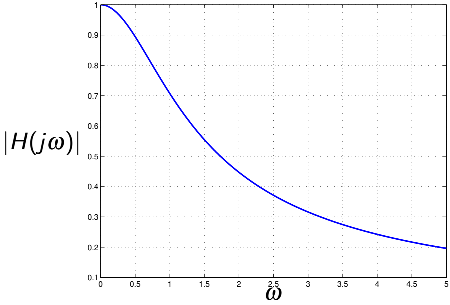
Números complexos, módulo e fase

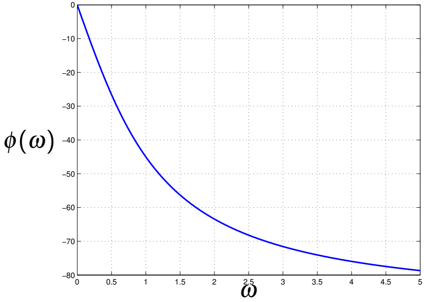
b) Esboce o módulo $M(\omega)$ e a fase $\phi(\omega)$ da função de transferência abaixo para $s = j\omega$.

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Números complexos, módulo e fase

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}, \quad M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}, \quad \phi(\omega) = -\arctan(\omega)$$





Sinais ortogonais

c) Determine a para que os sinais $x(t)$ e $y(t)$ sejam ortogonais

$$x(t) = G_2(t-1) \quad , \quad y(t) = (t+a)G_2(t-1)$$

$$\int_0^2 x(t)y(t)dt = \int_0^2 (t+a)dt = 2+2a = 0 \quad \Rightarrow a = -1$$

Sinais ortogonais

c) Determine a para que os sinais $x(t)$ e $y(t)$ sejam ortogonais

$$x(t) = G_2(t-1) \quad , \quad y(t) = (t+a)G_2(t-1)$$

$$\int_0^2 x(t)y(t)dt = \int_0^2 (t+a)dt = 2 + 2a = 0 \quad \Rightarrow a = -1$$

Frações parciais

d) Expresse a função racional $H(s)$ abaixo como uma soma de frações parciais

$$H(s) = \frac{5s^2+13s+10}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{5s^2+13s+10}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s+2}$$

d) Expresse a função racional $H(s)$ abaixo como uma soma de frações parciais

$$H(s) = \frac{5s^2 + 13s + 10}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{5s^2 + 13s + 10}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s+2}$$

Máximo do módulo

e) Considere a função de transferencia abaixo com $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$, $\omega_0 > 0$ e $s = j\omega$

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

i) Determine o módulo de $H(j\omega)$ para $\omega = \omega_0$

ii) Determine a frequência ω_r que maximiza $M(\omega) = |H(j\omega)|$ e o valor de $M(\omega_r)$

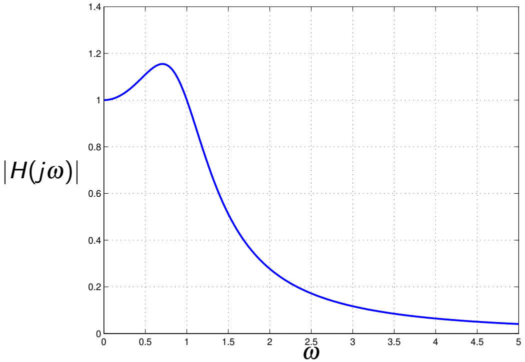
Máximo do módulo

$$M(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}}, \quad M(\omega_0) = \frac{1}{2\xi}$$

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Por exemplo, para

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \qquad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad M(\omega_r) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



Módulo de número complexo

f) Considere o sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

com $x[n] = z^n$.
Mostre que o módulo de $y[n]$, para $z = \exp(j\omega)$, é dado por

$$|y[n]| = |j\exp(-j\omega/2)\mathrm{sen}(\omega/2)| = |\mathrm{sen}(\omega/2)|$$

Esboce $|y[n]|$ para ω entre $-\pi$ e $+\pi$.

Módulo de número complexo

$$y[n] = \frac{(1 - z^{-1})z^n}{2}, \quad z = \exp(j\omega) \quad \Rightarrow \quad y[n] = \frac{\big(1 - \exp(-j\omega)\big)\exp(j\omega n)}{2}$$

$$= j\exp(-j\omega/2)\left(\frac{\exp(j\omega/2) - \exp(-j\omega/2)}{2j}\right)\exp(j\omega n)$$

$$= j\exp(-j\omega/2)\mathrm{sen}(\omega/2)\exp(j\omega n)$$

Módulo

$$|y[n]| = |\mathrm{sen}(\omega/2)|$$