

Nome: .....

RA: .....

**Obs.:** Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

**1ª Questão:** a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v} = (v - 1)(v + 2) = v^2 + v - 2, \quad v \in \mathbb{R}$$

b) Usando uma aproximação linear, determine o comportamento (local) em cada um dos pontos de equilíbrio

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

**2ª Questão:** a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema para  $x = 0$

$$\dot{v}_1 = -v_1(v_2 - 1) + 3x^2 = -v_1v_2 + v_1 + 3x^2$$

$$\dot{v}_2 = (v_1 + 1)v_2 - 2x = v_1v_2 + v_2 - 2x$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado ( $A$  e  $b$ ) tais que em torno dos pontos de equilíbrio  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

**3ª Questão:** Completando os retângulos em branco, determine uma realização  $(A, b, c, d)$  para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^3 - 4p^2 - 3p - 2)y(t) = (5p^3 - 12p^2 - 6p)x(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \square \\ 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & \square \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} \square \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = [1 \quad 1] v$$

a) Determine  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ , isto é, a transformada de Laplace de  $y(t)$

b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine  $y(t)$

5ª Questão: Determine  $a$  e  $b$  tais que

$$A^{-1} = aI + bA, \quad A = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$$

7ª Questão: Determine a solução  $v(t)$  para o sistema

$$\dot{v} = Av = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan  $\hat{A}$  da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz  $Q$  que transforma a matriz  $A$  na forma de Jordan  $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0) = \bar{v}_0, \quad y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função

$$y(t) = 5t^2 \cos(2t)$$

10ª Questão: Determine a resposta ao impulso  $h(t)$ ,  $t \geq 0$  (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x$$
$$y = [1 \quad 17] v$$

Laplace (funções causais):  $\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} \exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$$

Variáveis de estado:  $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$ ,  $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio:  $\bar{v}$  tais que  $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$ ,  $\bar{x} = \text{cte}$ . Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad B = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad C = \left[ \frac{\partial g_i}{\partial v_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}, \quad D = \left[ \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] \Big|_{\bar{v}, \bar{x}}$$

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} + \beta_3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2], \quad d = [\beta_3]$$

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx, \quad \frac{N(p)}{D(p)} = c(pI - A)^{-1}b + d = b'(pI - A')^{-1}c' + d, \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$v = T\hat{v} \Rightarrow \hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{b} = T^{-1}b, \quad \hat{c} = cT, \quad T \text{ não singular}$$

$$y(t) = c \exp(At)v_0 + c(\exp(At)u(t)) * (bx(t)) + dx(t), \quad Y(s) = c(sI - A)^{-1}v_0 + (c(sI - A)^{-1}b + d)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton: } \Delta(\lambda) = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i, \quad \Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i, \quad f(\text{diag}(A_1, \dots, A_N)) = \text{diag}(f(A_1), \dots, f(A_N))$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma \end{bmatrix}, \quad f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \dots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

$$\text{Forma modal: } M = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - \sigma)^2 + \omega^2,$$

$$\exp(Mt) = \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \quad \text{Forma modal de Jordan: } \begin{bmatrix} M & I & \dots & 0 \\ 0 & M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M \end{bmatrix}$$

Forma de Jordan de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\nu(M_\lambda) = n - \text{rank}(M_\lambda)$  (dimensão do espaço nulo de  $M_\lambda = A - \lambda I$ ):

1) Para cada  $\lambda$  (multiplicidade algébrica  $n_\lambda$ ), compute  $M_\lambda = (A - \lambda I)$  e a dimensão  $r_\lambda$  do espaço nulo de  $M_\lambda$ . O número de blocos de Jordan associados a  $\lambda$  é igual a  $r_\lambda$  e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a  $n_\lambda$ . Note que  $r_\lambda$  é a multiplicidade geométrica de  $\lambda$ , ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a  $\lambda$ ,  $1 \leq r_\lambda \leq n_\lambda$ .

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx, \quad v(0), \quad \text{para } x \text{ solução de } x = \bar{c}\bar{v}, \quad \dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0)$$

$$\Rightarrow \text{Sistema autônomo aumentado: } \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$