1ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v} = (v-2)(v+2) = v^2 - 4, \qquad v \in \mathbb{R}$$

b) Usando uma aproximação linear, determine o comportamento (local) em cada um dos pontos de equilíbrio

Pontos de equilíbrio: (2), $\quad(-2)$
Aproximação linear: $\dot{v} = [2v]v$

$$(2) : \dot{v} = [4]v \qquad \text{(instável)}, \quad (-2) : \dot{v} = [-4]v \qquad \text{(assint. estável)}$$

2ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema para $x = 0$

$$\dot{v}_1 = v_1(v_2+2) + x^2 = v_1v_2 + 2v_1 + x^2$$
$$\dot{v}_2 = (v_1+2)v_2 - 3x = v_1v_2 + 2v_2 - 3x$$

$$(0,0), \ (-2,-2)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$A = \begin{bmatrix} v_2+2 & v_1 \\ v_2 & v_1+2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2x \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(0,0): \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (-2,-2): \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Completando os retângulos em branco, determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^3 + 9p^2 + 8p + 7)y(t) = (4p^3 + 37p^2 + 34p + 31)x(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$

b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+7 & 4 \\ -5 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s-2}{s^2+5s+6} = \frac{-4}{s+2} + \frac{5}{s+3}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(5\exp(-3t) - 4\exp(-2t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Determine a e b tais que

$$A^{-1} = a\mathrm{I} + bA, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2), \quad a = 1/2, \quad b = 1/2$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A) = (\lambda - 1)^3$$

$$\mathrm{diag}(J_2(1), J_1(1)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $v(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = Av = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} 2\exp(-3t) - 15t\exp(-3t) \\ \exp(-3t) + 5t\exp(-3t) \end{bmatrix}$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & c \\ a & a + c \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função
$y(t) = (t^2 + t + 1)\cos(3t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a resposta ao degrau $y_u(t)$, $t \geq 0$ (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

$$H(s) = \frac{7s + 12}{s^2 + 7s + 12} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+3} - \frac{4}{s+4}, \quad y_u(t) = \big(1 + 3\exp(-3t) - 4\exp(-4t)\big)u(t)$$