Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.

1ª Questão: Determine a solução forçada (i.e. regime permanente) do sistema descrito pela função de transferência $H(s)$ abaixo quando a entrada é dada por $x(t) = 100\cos(5t)$

$$H(s) = \frac{2s+10}{s+100}$$

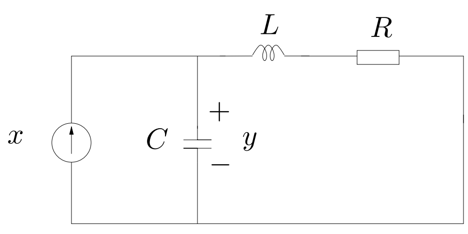
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: a) Determine a função de transferência $H(s) = Y(s)/X(s)$ do sistema descrito pelas equações

$$\dot{v}_1 = -4v_1 - 13v_2 + x \ , \ \dot{v}_2 = v_1 \ , \ y = 5v_1 + 4v_2 + x$$

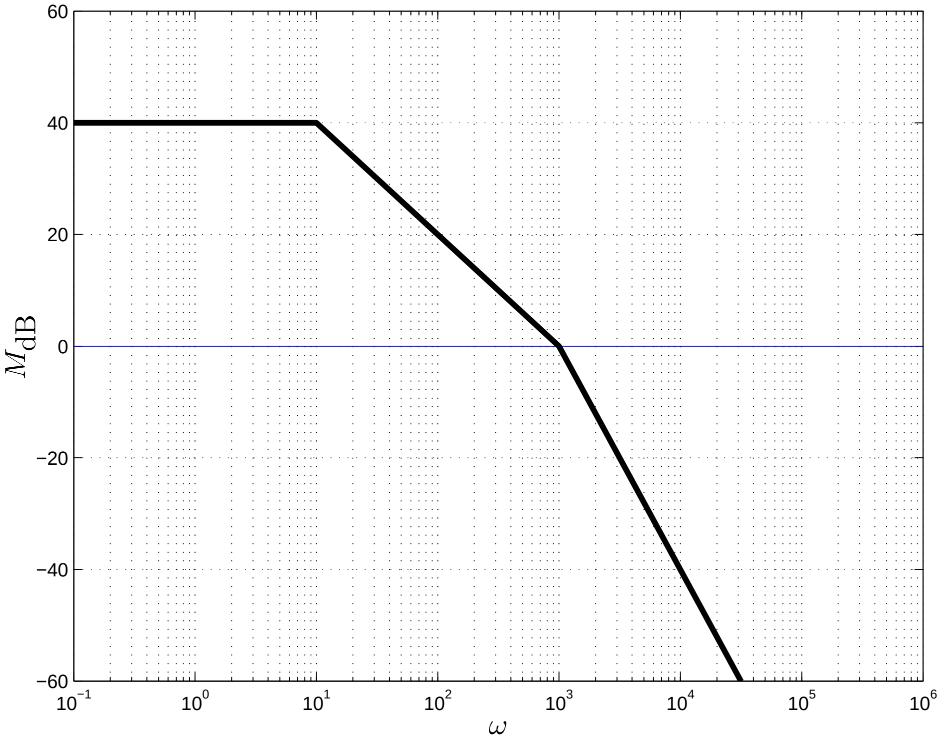
b) Determine a resposta causal ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ (condições iniciais nulas)

3ª Questão: a) Determine $H(s)$ para o circuito ao lado

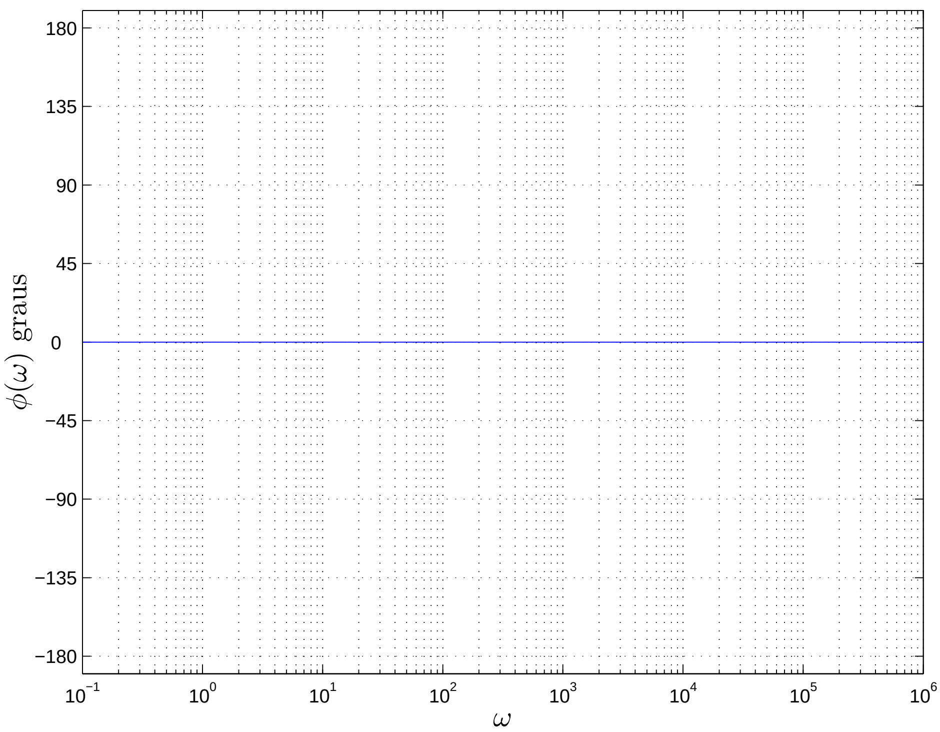


b) Considerando apenas o denominador de $H(s)$, determine ξ (fator de amortecimento) e ω_n (frequência natural de oscilação)

4ª Questão: Considere o diagrama assintótico de módulo de um sistema linear invariante no tempo com dois pólos estáveis (isto é, de parte real negativa) dado na figura abaixo.

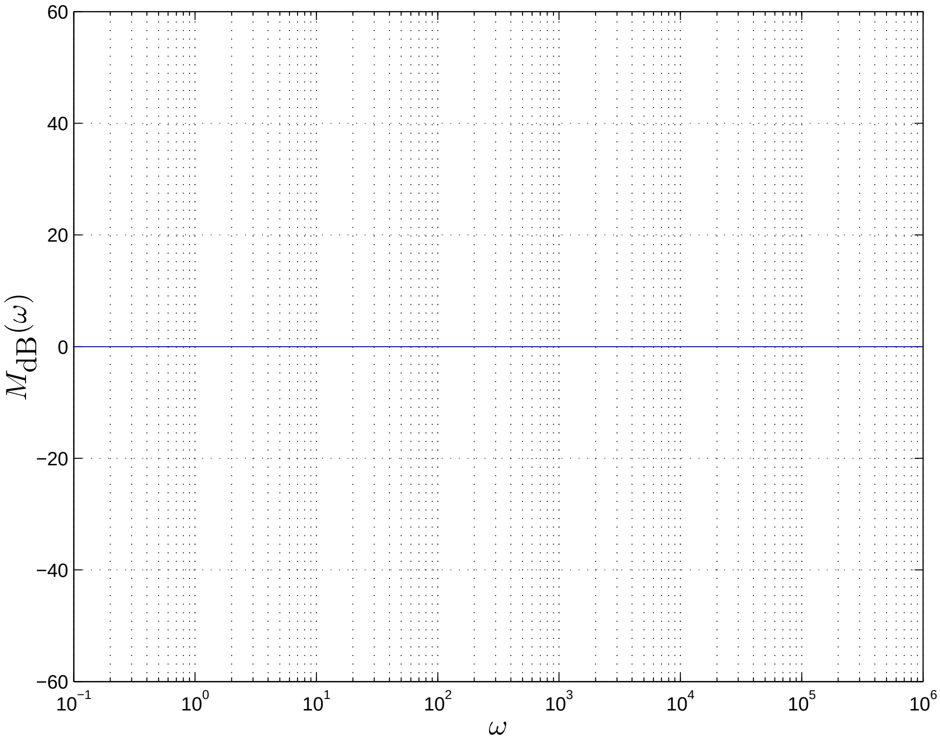


Sabendo que ao sistema foi acrescentado um zero de fase não mínima, localizado em $s = 100$, determine o diagrama de fase resultante.

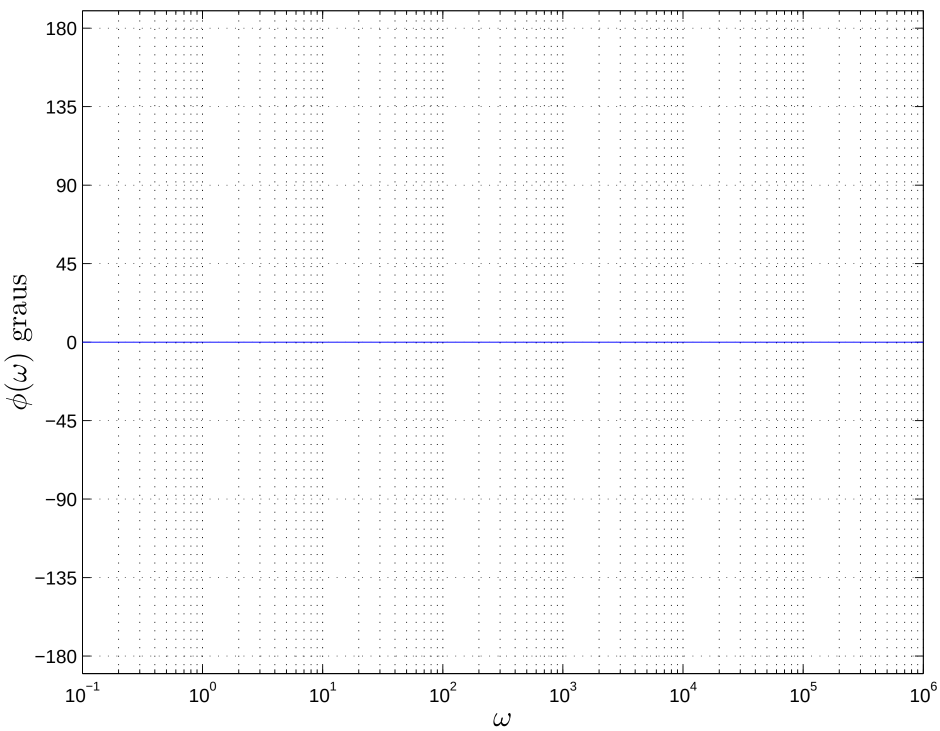


5ª Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+20)(s+20000)}{(s+200)^2(s+2000)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



6ª Questão: No sistema linear invariante no tempo causal descrito pela função de transferência abaixo, determine a e b para que a saída persistente (em regime) seja $2t + 1.1$ quando a entrada for $x(t) = 4t + 2$

$$H(s) = \frac{as + b}{s^2 + 9s + 20}$$

7ª Questão: Obtenha a solução da equação diferencial

$$(p^2+3p+2)y(t) = t, \;\; y(0) = \dot{y}(0) = 0, \;\;\; p = \frac{d}{dt}$$

8ª Questão: a) Determine a solução forçada da equação

$$(p^2+9)y(t) = 5\,\mathrm{sen}(3t)+2\cos(3t)\;, \qquad p = \frac{d}{dt}$$

b) Determine a solução da equação para as condições iniciais $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$

9ª Questão: a) Determine a função de transferência $H(z)$ para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação a diferenças

$$(p-2)^3y[n] = (3p^3 - 13p^2 + 15p - 7)x[n]\;, \qquad py[n] = y[n+1],\; p^m y[n] = y[n+m]$$

b) Determine $y_u[n]$, isto é, a resposta do sistema ao degrau unitário (condições iniciais nulas)

10ª Questão: a) Determine a solução forçada da equação a diferenças

$$y[n+1] - y[n] = 6n^2\;,\; y[0] = 0$$

b) Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução da equação acima.

Consulta

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) \quad , \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m\mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}x^{(k)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \ , \quad \mathrm{Re}(s+a) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2} \quad , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2} \quad , \ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to+\infty} sX(s) \ , \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais)

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(t), \qquad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad \text{se} \ \ \bar{D}(p)x(t) = 0 \ \text{então} \ \ \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \ , \ D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k g_k(t), \qquad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Resposta em Freqüência: $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a freqüência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) \ \ \text{sendo log o logaritmo na base 10}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (freqüência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta freqüência

Pólos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \ \ ; \ \ M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} \ , \quad \mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1, \quad \mathcal{Z}\{\delta[n+m]\} = z^m \ , m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}, \ \mathcal{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2} \ , \mathcal{Z}\{n^2a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2z}{(z-a)^3}, \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}, \ \mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^n u[n]\right\} = \frac{z^{(m+1)}}{(z-a)^{(m+1)}}, \ m \in \mathbb{N}, |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{x[n]\}$$

Coeficientes a determinar (equações a diferenças)

$$D(p)y[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k[n] \quad f_k[n] \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então λ^n, $n\lambda^n$, $\ldots$, $n^{r-1}\lambda^n$ são modos próprios.

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \ \ , \ \ \text{se } \ \bar{D}(p)x[n] = 0 \text{ então } \ \bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f[n] = N(p)x[n] \ , \ D(p)y_h[n] = 0$$

$y_f[n]$: combinação linear dos modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)