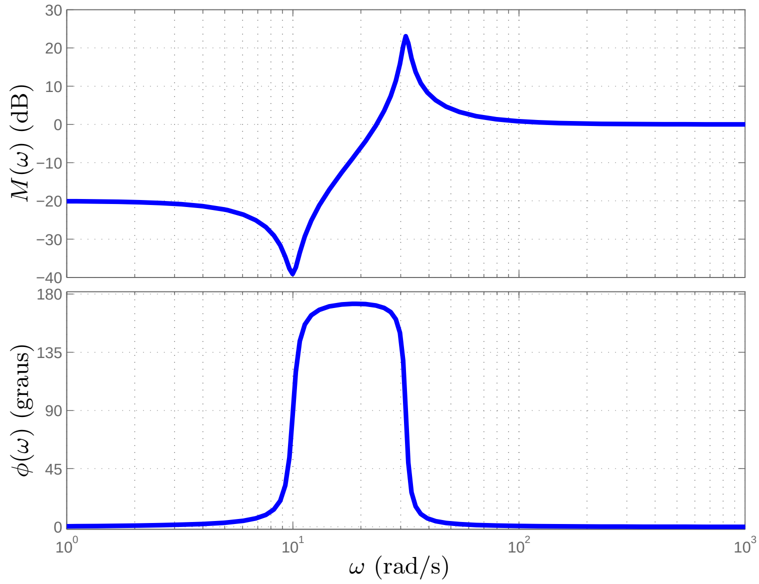
1ª Questão: Determine (com valores aproximados) a saída persistente (em regime) para a entrada $x(t) = \cos(20t)\text{sen}(10t)$ do sistema estável dado pelo diagrama de Bode (módulo em dB e fase em graus) abaixo.



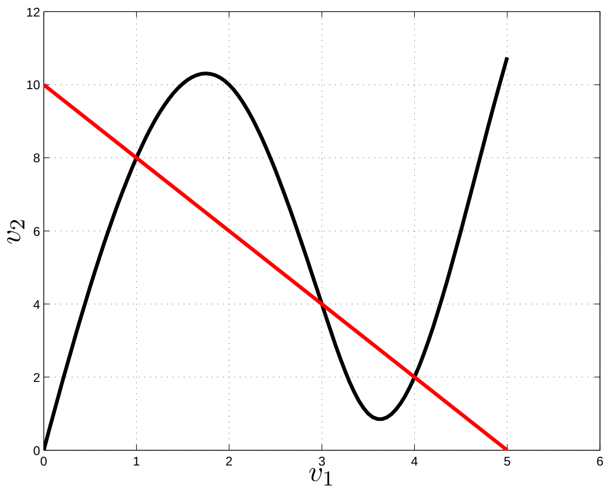
$$x(t) = -0.5\ \text{sen}(10t) + 0.5\ \text{sen}(30t)$$

$$M(10) \approx -40\ \text{dB}, \phi(10) \approx 90\ \text{graus} \quad , \quad M(30) \approx 20\ \text{dB}, \phi(30) \approx 135\ \text{graus}$$

$$y_f(t) = -0.005\ \text{sen}(10t + 90^o) + 5\ \text{sen}(30t + 135^o)$$

2ª Questão: Determine os pontos de equilíbrio do diodo túnel descrito pelas equações abaixo e pela relação $v_2 = f(v_1)$ ao lado quando $x = 10$.

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -f(v_1) + v_2 \\ \dot{v}_2 &= -2v_1 - v_2 + x \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \quad (1,8), (3,4), (4,2)$$

3ª Questão: Determine a função de transferência $H(s) = Y(s)/X(s)$ do sistema cuja realização (A, b, c, d) é dada por

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Av + bx \\ y &= cv + dx\end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -11 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; d = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{5s^5 + 60s^4 + 64s^3 + 68s^2 + 72s + 76}{s^5 + 11s^4 + 12s^3 + 13s^2 + 14s + 15}$$

4ª Questão: Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} v \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace unilateral de $v(t)$
b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $v(t)$

$$V(s) = \frac{1}{s^2 - 6s + 13} \begin{bmatrix} 2s - 4 \\ s - 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-3)^2 + 2^2} \begin{bmatrix} 2(s-3) + 2 \\ (s-3) - 2(2) \end{bmatrix}, \; v(t) = \exp(3t) \begin{bmatrix} 2\cos(2t) + \mathrm{sen}(2t) \\ \cos(2t) - 2\mathrm{sen}(2t) \end{bmatrix} u(t)$$

5ª Questão: Determine uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A^{-1} = A^2 + 3A + 4A^0$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

6ª Questão: Determine uma transformação Q que diagonaliza a matriz A, isto é, tal que $Q^{-1}AQ$ seja diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $v(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = Av, \; v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, v(t) = Q\exp(-2t) \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\mathrm{sen}(2t) \\ \mathrm{sen}(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix} Q^{-1}v(0) = \exp(-2t) \begin{bmatrix} \cos(2t) + 2\mathrm{sen}(2t) \\ \cos(2t) + 3\mathrm{sen}(2t) \end{bmatrix}$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^3$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo, com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = 10t + 20t\exp(5t)\cos(3t)$.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(5t)\cos(3t) & -\exp(5t)\mathrm{sen}(3t) & t\exp(5t)\cos(3t) & -t\exp(5t)\mathrm{sen}(3t) \\ 0 & 0 & \exp(5t)\mathrm{sen}(3t) & \exp(5t)\cos(3t) & t\exp(5t)\mathrm{sen}(3t) & t\exp(5t)\cos(3t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \exp(5t)\cos(3t) & -\exp(5t)\mathrm{sen}(3t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \exp(5t)\mathrm{sen}(3t) & \exp(5t)\cos(3t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \bar{c}\exp(At)\bar{v}(0)$$

10ª Questão: Determine a resposta $y_u(t)$ ao degrau (isto é, $x(t) = u(t)$ e condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} -23 & -70 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix} x$$

$$H(s) = \frac{12s^2 + 61s + 50}{s^2 + 7s + 10} = \frac{5}{s} + \frac{4}{s+2} + \frac{3}{(s+5)} \quad , \quad y_u(t) = \big(5 + 4\exp(-2t) + 3\exp(-5t)\big)u(t)$$