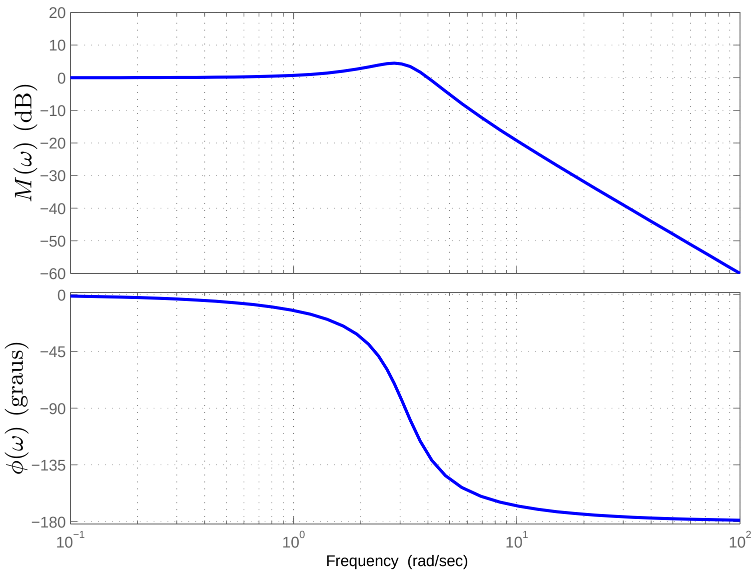
Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.

1ª Questão: Determine a solução forçada (regime permanente) para a entrada $x(t) = 10+10\text{sen}(4t)$ do sistema cujo diagrama de Bode é mostrado abaixo.

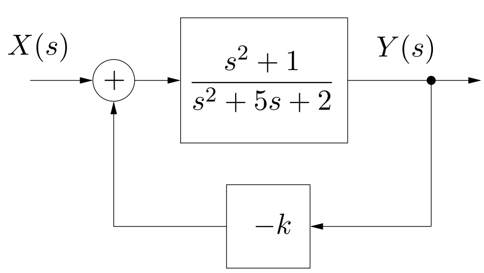


1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: Defina (em palavras) controlabilidade para o sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = Av + bx$$

3ª Questão: Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro k, calculada para $k = 5$.



4ª Questão: Considere um sistema linear invariante no tempo (A, b, c, d) e sua matriz de controlabilidade dados por

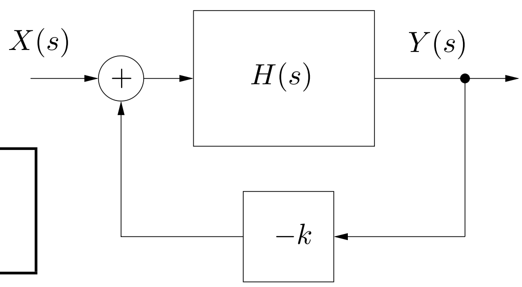
$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx \qquad , \qquad \mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assinale a alternativa incorreta:
- É possível construir uma transformação de similaridade que separa o vetor de estados em estados controláveis e não controláveis
- O sistema não é controlável
- O sistema tem dois modos próprios não controláveis
- Modos próprios não controláveis não aparecem na função de transferência do sistema
- O sistema tem dois modos próprios controláveis

5ª Questão: Obtenha a matriz de observabilidade e determine se o sistema é ou não observável para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

6ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^3 + s^2 + 10s + 22} \ ,$$

7ª Questão: a) Determine a matriz P solução da equação de Lyapunov associada ao sistema linear invariante no tempo

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} v$$

isto é, (o símbolo $(\cdot)'$ indica a transposta da matriz)

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \qquad \text{tal que} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Determine, em função da solução encontrada, se o sistema é assintoticamente estável ou não.

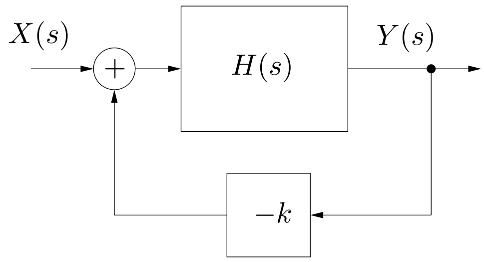
8ª Questão: Considere a estabilidade do ponto de equilíbrio $v = 0$ do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = Av \ , \ A \in \mathbb{R}^{5\times 5} \quad , \quad \text{autovalores de } A : -1 \pm j, -1 \pm j, 0$$

Assinale todas as alternativas que estiverem corretas:
- O ponto de equilíbrio $v = 0$ não é instável
- Quaisquer que sejam as condições iniciais, as trajetórias não divergem (isto é, permanecem limitadas)
- O ponto de equilíbrio $v = 0$ é assintoticamente estável
- Existem condições iniciais $v(0)$ que produzem trajetórias que convergem para o ponto de equilíbrio $v = 0$
- Trajetórias iniciadas em $v(0) = \bar{v}$ (constante) convergem para o ponto de equilíbrio $v = 0$

9ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^4 + 6s^3 + 8s^2} = \frac{(s+1)(s+3)}{s^2(s+2)(s+4)}$$



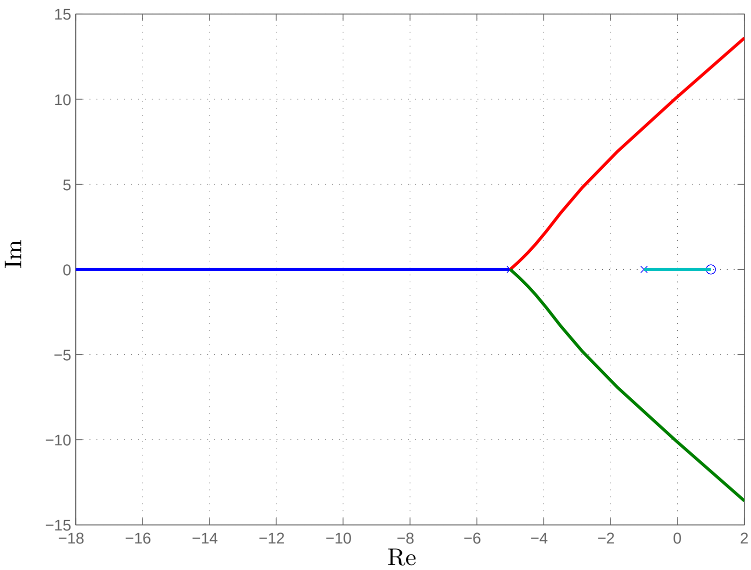
a) Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes para o sistema realimentado.

b) Determine o ponto de encontro das assíntotas

10ª Questão: Considere o lugar das raízes de um sistema $H(s)$ realimentado negativamente com ganho k, mostrado na figura ao lado, com

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+5)^3(s+1)}$$

Determine (aproximadamente) o maior valor de k para que o sistema em malha fechada seja BIBO estável



Consulta

$$M_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega) \ \text{ sendo log o logaritmo na base 10}$$

Controlável se e somente se *rank*$\big(\mathrm{Ctrb}(A,b)\big) = n$. Observável se e somente se *rank*$\big(\mathrm{Obsv}(A,c)\big) = n$.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad \mathrm{Obsv}(A,c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{Ctrb}(A,b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$
Se *rank* de $\mathrm{Ctrb}(A,b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\mathrm{Ctrb}(A,b)$ mais vetores LI

Se *rank* de $\mathrm{Obsv}(A,c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\mathrm{Obsv}(A,c)$ mais vetores LI

Sensibilidade de $f(x,y)$ em relação a x: $\dfrac{x}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \ \Rightarrow \ D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \ , \ \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os pólos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \to +\infty$.

3) Condição de fase: $\displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) = \pi$
sendo $\phi_r(s) = \angle(s-\lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s-\gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $\displaystyle k = \Big(\prod_{r=1}^{m} |s-\lambda_r|\Big) / \Big(\prod_{r=1}^{\ell} |s-\gamma_r|\Big)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos pólos: $\displaystyle \phi_i(s)\Big|_{s\approx\lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{m} \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\displaystyle \varphi_i(s)\Big|_{s\approx\gamma_i} = \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\dfrac{\pi(1+2r)}{m-\ell} \quad , \quad \beta_\ell > 0 \quad , \quad r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\displaystyle \frac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m} \mathrm{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \mathrm{Re}(\gamma_r)\right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s) + kN(s) = 0$