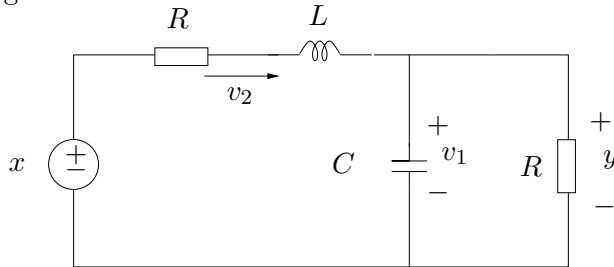


Nome: .....

RA: .....

**Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.**

**1ª Questão:** a) Determine a equação diferencial ( $x$  é a tensão de entrada,  $y$  é a tensão de saída) do circuito da figura abaixo



b) Para  $R = L = 1$  e  $C = 0.1$ , determine a solução forçada (regime permanente) para a entrada  $x(t) = 100 \cos(2t) + 100$

$$D(p) = p^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)p + \frac{2}{LC}, \quad N(p) = \frac{1}{LC}$$

$$H(s) = \frac{10}{s^2 + 11s + 20}$$

$$y_f(t) = 100|H(j2)| \cos(2t + \angle H(j2)) + 100|H(j0)| =$$

$$= 100(0.368) \cos(2t - 0.942) + 50 = 36.8 \cos(2t - 0.942) + 50$$

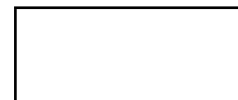
$$= 21.6 \cos(2t) + 29.7 \sin(2t) + 50$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

**2ª Questão:** Determine a equação diferencial do sistema cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = (2 \exp(-3t) - \exp(-2t))u(t)$$

$$H(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)} \Rightarrow \ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = \dot{x} + x$$



**3ª Questão:** a) Determine  $Y(s)$  para a equação diferencial

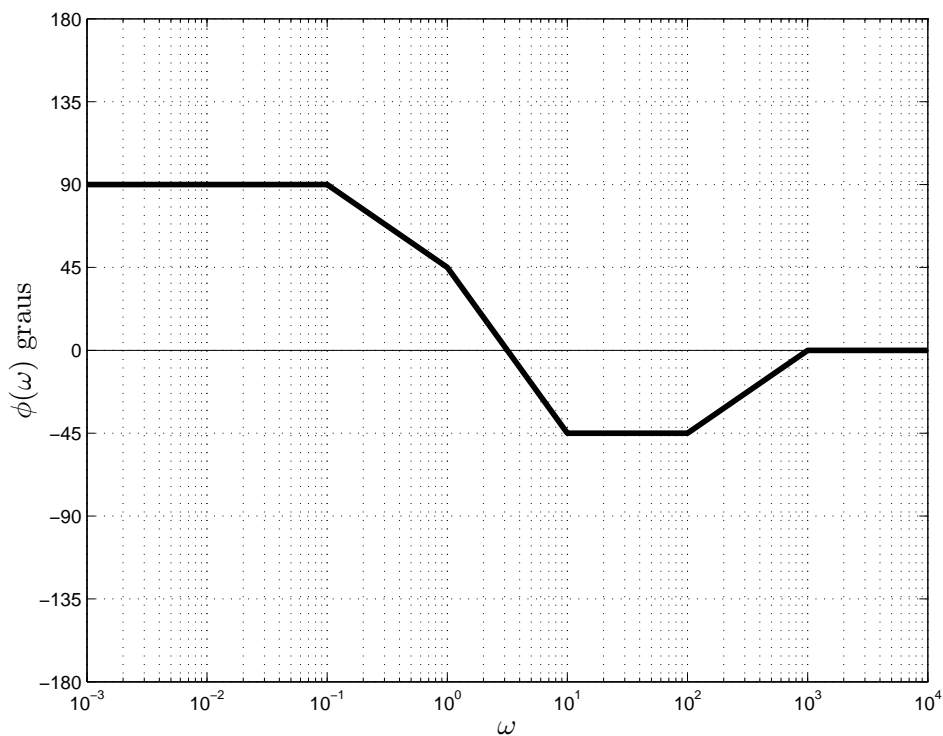
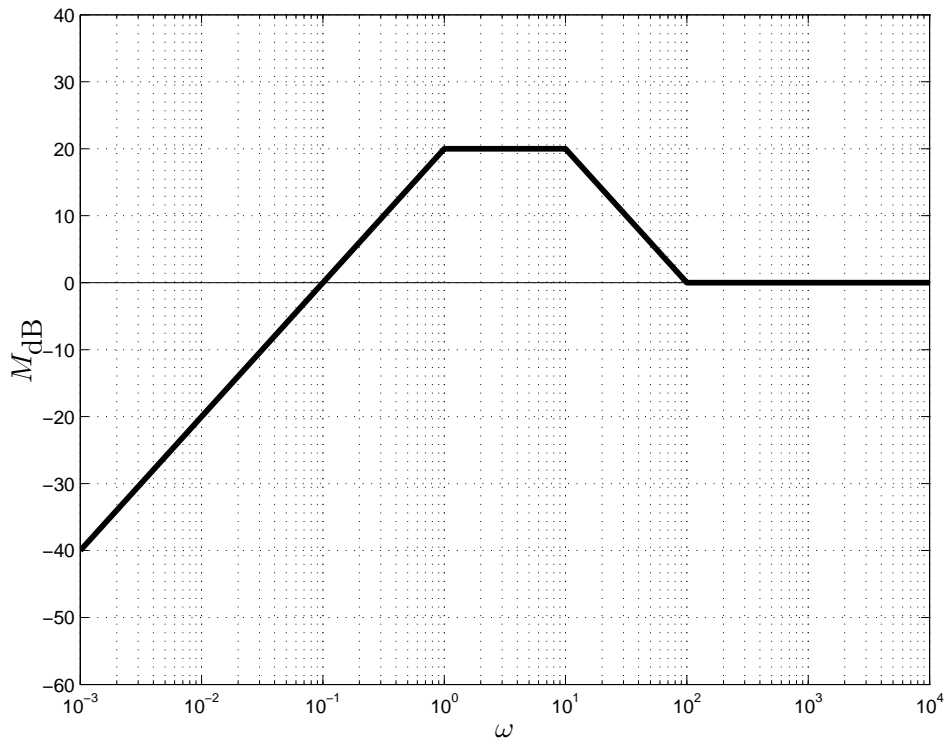
$$(p^2 + 4p + 5)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2, \quad p = \frac{d}{dt}, \quad p^k = \frac{d^k}{dt^k}$$

b) Determine  $y(t)$

$$Y(s) = \frac{s + 6}{s^2 + 4s + 5}, \quad y(t) = (\exp(-2t)(\cos(t) + 4\text{sen}(t))u(t) =$$

$$((0.5 + 2j) \exp((-2 - j)t) + (0.5 - 2j) \exp((-2 + j)t))u(t)$$

4ª Questão: a) Esboce as assíntotas de fase do sistema linear invariante no tempo (pólos e zeros com parte real negativa ou igual a zero) cujo diagrama assintótico de módulo (em decibéis) é mostrado abaixo.



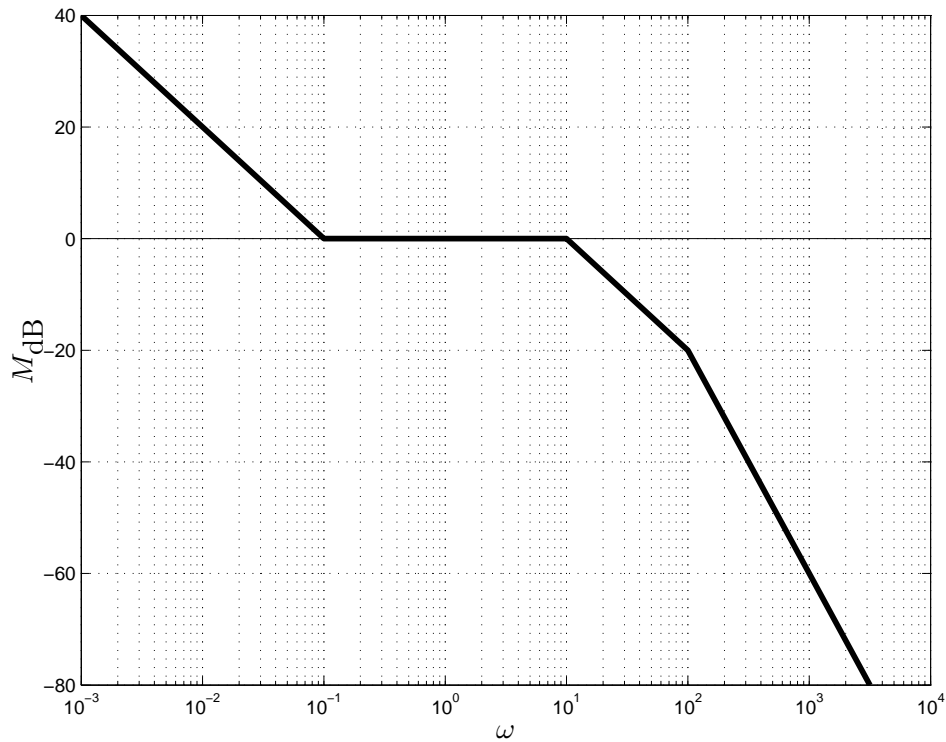
b) A partir do diagrama de módulo, determine a relação sinal-ruído  $(S/N)_{dB}$  na saída do sistema para a entrada

60dB

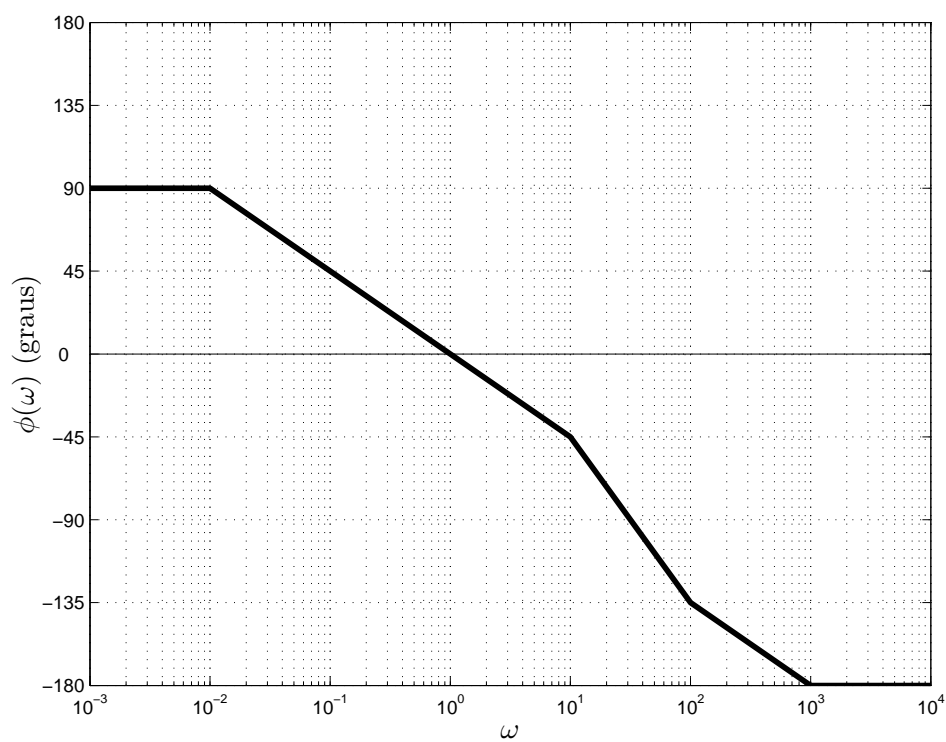
$$x(t) = \underbrace{100 \cos(3t)}_{\text{sinal}} + \underbrace{\text{sen}(2000t)}_{\text{ruído}}$$

5<sup>a</sup> Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{100(10s - 1)}{s(s + 10)(s + 100)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



**6ª Questão:** Determine a solução forçada  $y_f(t)$  (isto é, descartando-se o transitório) do sistema linear invariante no tempo cuja equação diferencial é dada por

$$(p^3 + 5p^2 + 2p + 5)y(t) = (p + 1)x(t), \quad p = \frac{d}{dt}, p^k = \frac{d^k}{dt^k} \quad y_f(t) = \left(\frac{1}{5}t + \frac{8}{25}\right)u(t) = (0.2t + 0.32)u(t)$$

quando  $x(t) = (t + 1)u(t)$ .

**7ª Questão:** Determine a solução  $y(t)$  da equação diferencial

$$(p + 2)y(t) = t^2 \exp(-2t), \quad y(0) = 0$$

$$y(t) = \frac{1}{3}t^3 \exp(-2t)$$

**8ª Questão:** a) Determine a solução forçada da equação

$$(p^2 + p)y(t) = 10t, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$$

$$y_f(t) = 5t^2 - 10t$$

b) Determine uma equação diferencial homogênea, ordinária, linear, a coeficientes constantes e as condições iniciais que produzem como solução a mesma solução da equação do item 8.a).

$$p^3(p + 1)y = (p^4 + p^3)y = 0, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1, \ddot{y}(0) = -1, y^{(3)}(0) = 11$$

**9ª Questão:** Determine a resposta ao degrau  $y_u[n]$  (isto é, determine a saída  $y_u[n] = y[n]$  para  $x[n] = u[n]$  e condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo descrito pela equação a diferenças

$$y[n + 2] - 3y[n + 1] + 2y[n] = x[n]$$

$$y_u[n] = (-1 + 2^n - n)u[n]$$

**10ª Questão:** a) Determine a solução forçada de

$$y[n + 2] - y[n] = n^2, \quad y[0] = 0, \quad y[1] = 1$$

$$y_f[n] = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

b) Determine a solução de

$$y[n + 2] - y[n] = n^2, \quad y[0] = 0, \quad y[1] = 1 \quad y[n] = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n - 3(-1)^n + 3) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}$$

## CONSULTA

**Transformada de Laplace (unilateral):**

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-st) dt$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) \quad , \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m \mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} x^{(k)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} \exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \quad , \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0 \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2} \quad , \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2} \quad , \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0$$

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

**Coefficientes a determinar (equações diferenciais)**

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^m a_k f_k(t), \quad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se  $\lambda$  é raiz de multiplicidade  $r$  de  $D(\lambda)$ , então  $\exp(\lambda t)$ ,  $t \exp(\lambda t)$ ,  $\dots$ ,  $t^{r-1} \exp(\lambda t)$  são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad \text{se } \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada: } y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \quad , \quad D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^m b_k g_k(t), \quad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

**Resposta em Freqüência:**  $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-st) dt$  ,  $H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a freqüência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega) \text{ sendo log o logaritmo na base 10}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \Rightarrow M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) ; \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

$\omega_c$  (freqüência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta freqüência

Pólos complexos:  $0 < \xi < 1, \omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} ; M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

**Transformada Z:**  $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}$  ,  $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$  ,  $\mathcal{Z}\{\delta[n+m]\} = z^m$  ,  $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k} , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a} , \quad \mathcal{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2} , \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3} , \quad \mathcal{Z}\left\{\binom{n+m}{m} a^n u[n]\right\} = \frac{z^{(m+1)}}{(z-a)^{(m+1)}} , \quad m \in \mathbb{N} , \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n}{m} a^{n-m} u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} , \quad m \in \mathbb{N} , \quad |z| > |a|$$

**Coefficientes a determinar (equações a diferenças)**

$$D(p)y[n] = 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=1}^m a_k f_k[n] \quad f_k[n] \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se  $\lambda$  é raiz de multiplicidade  $r$  de  $D(\lambda)$ , então  $\lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{r-1}\lambda^n$  são modos próprios.

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] , \text{ se } \bar{D}(p)x[n] = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$$

$$\text{Solução forçada: } y[n] = y_h[n] + y_f[n] \Rightarrow D(p)y_f[n] = N(p)x[n] , D(p)y_h[n] = 0$$

$y_f[n]$ : combinação linear dos modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)