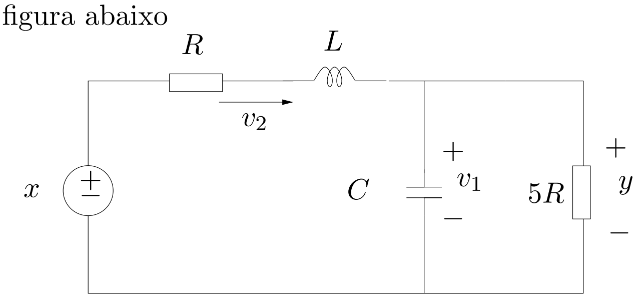
Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.

1ª Questão: a) Determine a equação diferencial (x é a tensão de entrada, y é a tensão de saída) do circuito da figura abaixo



1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

b) Para $R = L = 1$ e $C = 0.2$, determine a solução forçada (regime permanente) para a entrada $x(t) = 100\cos^2(2t)$

$$D(p) = p^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{5RC}\right)p + \frac{6}{5LC} \quad , \quad N(p) = \frac{1}{LC}$$

$$H(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 6} \quad , \quad x(t) = 50\cos(4t) + 50$$

$$y_f(t) = 50|H(j4)|\cos(4t + \angle H(j4)) + 50|H(j0)| =$$

$$= 50(0.390)\cos(4t - 2.47) + 50(0.833) = 19.5\cos(4t - 2.47) + 41.65$$

2ª Questão: Determine a equação diferencial do sistema cuja resposta ao degrau é dada por

$$y_u(t) = \Big(\frac{3}{2}\exp(-t) - \frac{5}{6}\exp(-3t) - \frac{2}{3}\Big)u(t)$$

$$H(s) = \frac{s - 2}{(s+1)(s+3)} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = \dot{x} - 2x$$

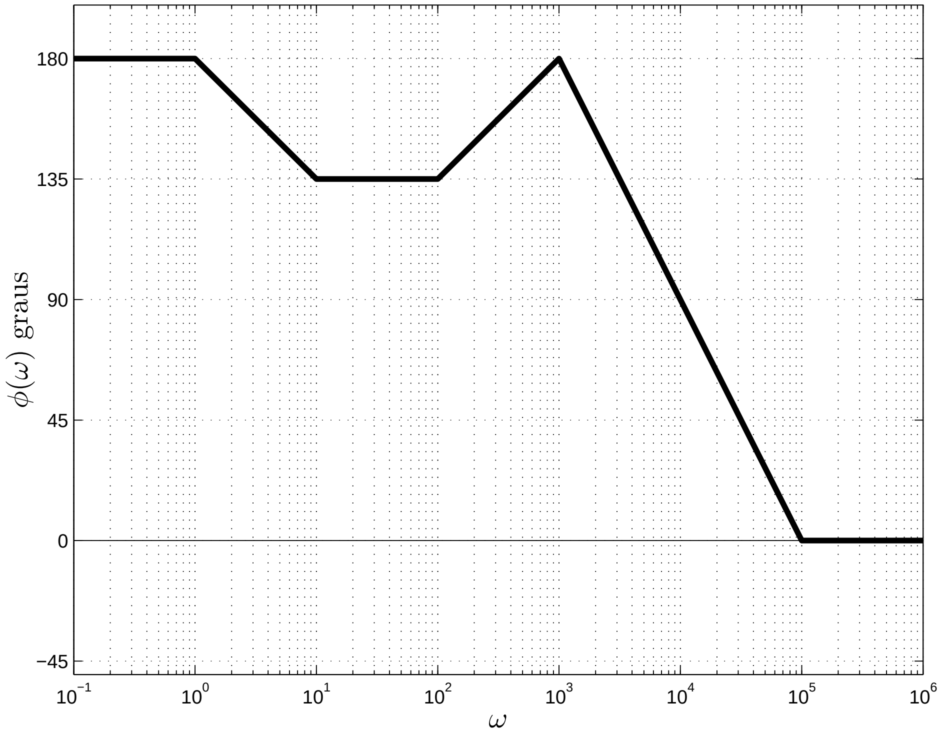
3ª Questão: a) Determine $Y(s)$ para o sistema descrito pelas equações

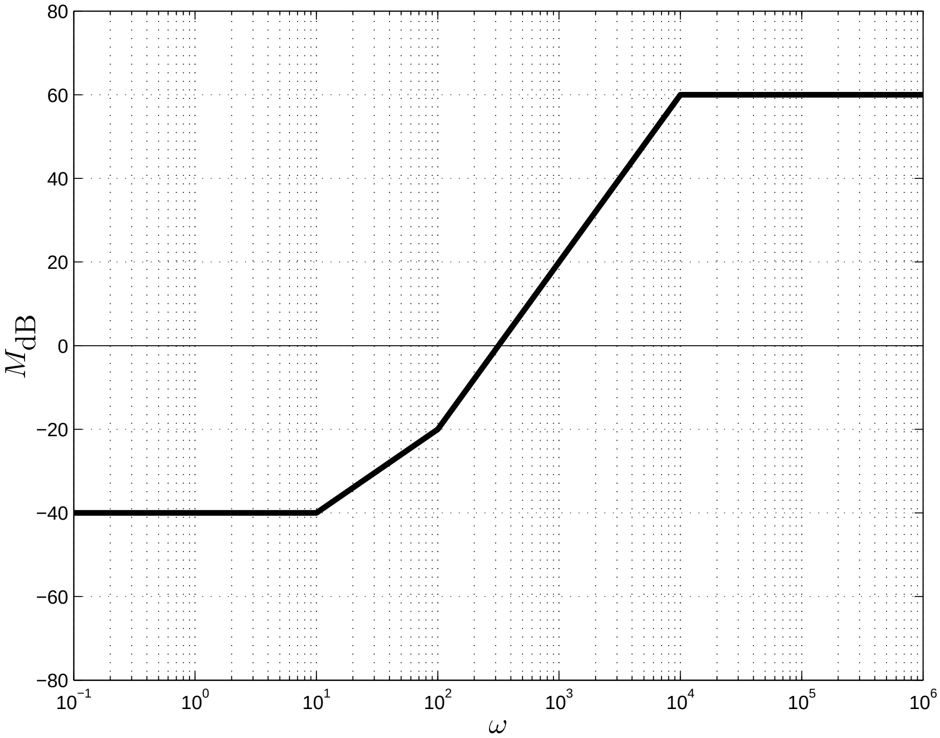
$$\dot{v}_1 = v_2 \ , \ \dot{v}_2 = -8v_1 - 4v_2 \ , \ y = v_2 \quad , \quad v_1(0) = 1, v_2(0) = 2$$

b) Determine $y(t)$

$$Y(s) = \frac{2s - 8}{s^2 + 4s + 8} \quad , \quad y(t) = 2\exp(-2t)\big(\cos(2t) - 3\mathrm{sen}(2t)\big)u(t)$$

4ª Questão: a) Sabendo que o valor DC é -40 dB, esboce as assíntotas de módulo (em decibéis) do sistema linear invariante no tempo cujo diagrama assintótico de fase (em graus) é mostrado abaixo.





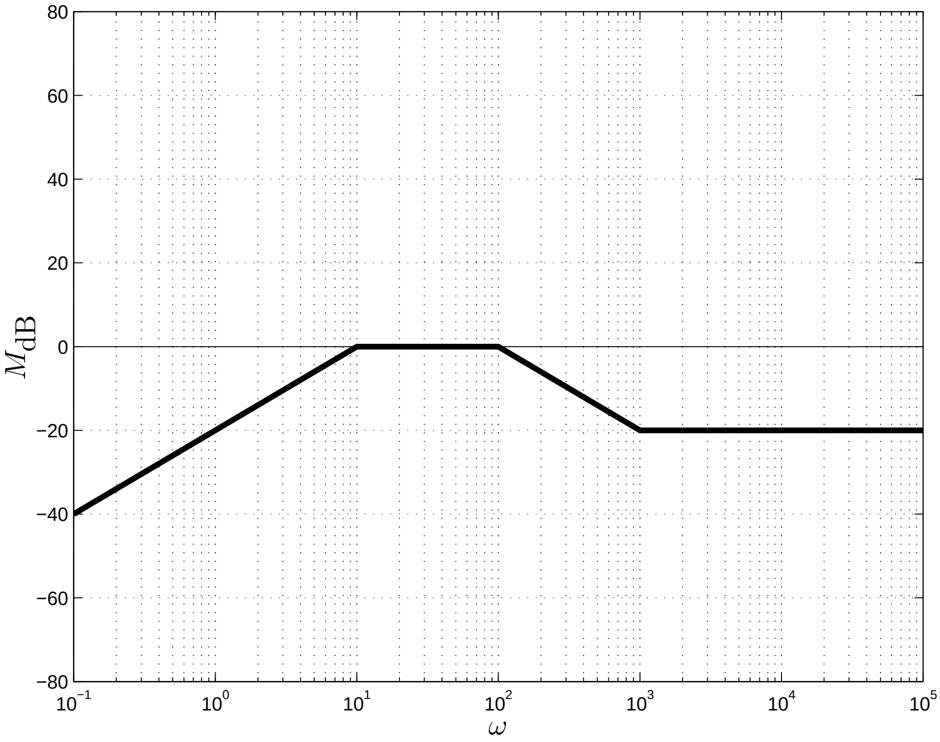
b) A partir do diagrama de módulo, determine a relação sinal-ruído $(\text{S/N})_{\text{dB}}$ na saída do sistema para a entrada

-60 dB

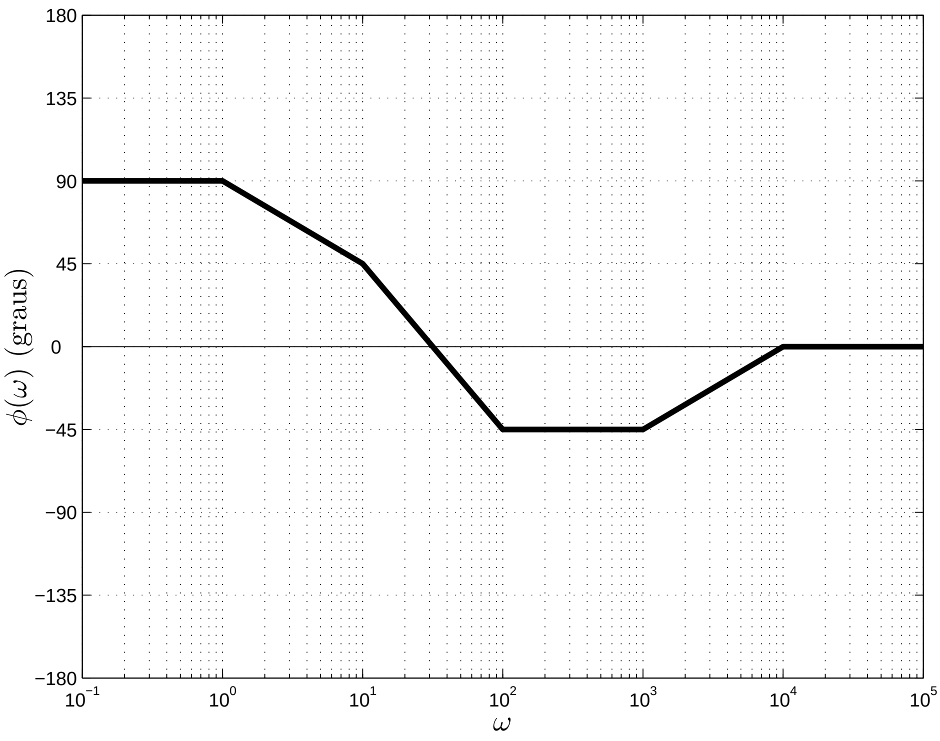
$$x(t) = \underbrace{100\cos(3t)}_{\text{sinal}} + \underbrace{\text{sen}(10^5 t)}_{\text{ruído}}$$

5$^{\underline{a}}$ Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{s(s+1000)}{10(s+10)(s+100)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



6ª Questão: Determine a solução forçada $y_f(t)$, $t > 0$ do sistema linear invariante no tempo cuja equação diferencial é dada por

$$(p^3+1)y(t) = (p+10)x(t) \ , \ p = \frac{d}{dt}, p^k = \frac{d^k}{dt^k}$$

$$y_f(t) = (5t^2+t+10)u(t)$$

quando $x(t) = \Big(\frac{t^2}{2}+1\Big)u(t)$.

7ª Questão: Determine a solução $y(t)$ da equação diferencial

$$(p^2+p)y(t) = t^2 \quad , \quad y(0)=1, \dot{y}(0)=1$$

$$y(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t + \exp(-t)$$

8ª Questão: a) Determine a solução forçada da equação

$$(p^2+5p+6)y(t) = -570\cos(10t) - 62\,\mathrm{sen}(10t)$$

$$y(0)=4, \dot{y}(0)=-14$$

$$y_f(t) = 5\cos(10t) - 2\mathrm{sen}(10t)$$

b) Determine uma equação diferencial homogênea, ordinária, linear, a coeficientes constantes e as condições iniciais que produzem como solução a mesma solução da equação do item 8.a).

$$(p^2+100)(p^2+5p+6)y(t) = 0, y(0)=4, \dot{y}(0)=-14, \ddot{y}(0)=-524, y^{(3)}(0)=2084$$

9ª Questão: Determine a resposta ao degrau $y_u[n]$ (isto é, determine a saída $y_u[n] = y[n]$ para $x[n] = u[n]$ e condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] + 4y[n+1] - 5y[n] = x[n]$$

$$y_u[n] = \Big(-\frac{1}{36} + \frac{1}{36}(-5)^n + \frac{1}{6}n\Big)u[n]$$

10ª Questão: a) Determine a solução forçada de

$$y[n+2] - y[n] = n+1 \quad , \quad y[0]=1 \ , \ y[1]=1$$

$$y_f[n] = \frac{1}{4}n^2$$

b) Determine a solução de

$$y[n+2] - y[n] = n+1 \ , \ y[0]=1 \ , \ y[1]=1$$

$$y[n] = \frac{1}{4}n^2 + \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(-1)^n$$

Consulta

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) \quad , \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m\mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}x^{(k)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \;,\quad \mathrm{Re}(s+a) > 0 \;,\; m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2} \quad , \; \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2} \quad , \; \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to +\infty} sX(s) \;, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais)

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(t), \qquad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad \text{se} \;\; \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \;\bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \;,\; D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k g_k(t), \qquad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Resposta em Freqüência: $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a freqüência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) \ \text{ sendo log o logaritmo na base 10}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \ \ ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (freqüência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta freqüência

Pólos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \ \ ; \ \ M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} \ , \quad \mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1, \quad \mathcal{Z}\{\delta[n+m]\} = z^m \ , \ m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a} \quad , \quad \mathcal{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2} \ , \ |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3} \quad , \quad \mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^n u[n]\right\} = \frac{z^{(m+1)}}{(z-a)^{(m+1)}} \quad , \quad m \in \mathbb{N} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m} u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \quad , \quad m \in \mathbb{N} \quad , \quad |z| > |a|$$

Coeficientes a determinar (equações a diferenças)

$$D(p)y[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k[n] \quad f_k[n] \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então λ^n, $n\lambda^n$, $\ldots$, $n^{r-1}\lambda^n$ são modos próprios.

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \ \ , \ \text{ se } \ \bar{D}(p)x[n] = 0 \text{ então } \ \bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f[n] = N(p)x[n] \ , \ D(p)y_h[n] = 0$$

$y_f[n]$: combinação linear dos modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)