

Análise de Sinais — DFT e FFT (introdução)

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Transformada Discreta de Fourier

- Cálculos numéricos da transformada de Fourier para um sinal $x(t)$ baseiam-se em um conjunto finito de valores amostrados do sinal, e resultam em valores discretos de $X(\omega)$.
- A relação entre as amostras de $X(\omega)$ com as amostras de $x(t)$ pode ser estabelecida a partir do Teorema da Amostragem (no tempo) e de seu dual, a amostragem espectral.

- Considere $x(t)$ um sinal limitado no tempo de largura τ , com espectro em frequência $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

- Como $x(t)$ é limitado no tempo, o espectro $X(\omega)$ é ilimitado em frequência.
- Amostrando $x(t)$ com intervalos T , obtém-se o sinal amostrado $x_a(t)$, com as amostras $x(kT)$. Pelo Teorema da Amostragem o espectro do sinal amostrado é constituído pela repetição de $X(\omega)$ a cada $f_s = 1/T$ Hz (com sobreposições ou *aliasing*).

- Repetindo-se o sinal amostrado a cada $T_0 > \tau$ segundos, tem-se um sinal periódico que pode ser descrito por uma série exponencial de Fourier

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(jk\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

- Portanto, os coeficientes da série de Fourier para $x_{T_0}(t)$ são $(1/T_0)$ vezes os valores das amostras do espectro de $X(\omega)$ tomadas a intervalos de ω_0 , ou seja, o espectro do sinal periódico $x_{T_0}(t)$ é o espectro $X(\omega)$ amostrado.
- Como $T_0 > \tau$, os ciclos sucessivos de $x(t)$ que aparecem em $x_{T_0}(t)$ não se sobrepõem, e $x(t)$ pode ser recuperado de $x_{T_0}(t)$.

- A recuperação de $x(t)$ a partir de $x_{T_0}(t)$ indica, de maneira indireta, que $X(\omega)$ pode ser reconstruído a partir das amostras $X(k\omega_0)$, que são separadas pela frequência fundamental $f_0 = 1/T_0$ Hz do sinal periódico $x_{T_0}(t)$.
- Portanto, a condição de recuperação é

$$T_0 > \tau \iff f_0 < \frac{1}{\tau} \text{ Hz}$$

- A transformada de Fourier do sinal periódico $x_{T_0}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x_{T_0}(t)\} &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \mathcal{F}\{\exp(jk\omega_0 t)\} \\ &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)\end{aligned}$$

que é um sinal construído pelas amostras de $X(\omega)$ espaçadas de ω_0 rad/s, ou $f_0 = 1/T_0$ Hz.

- É interessante notar que o número de amostras do sinal no tempo em um período T_0 é idêntico ao número de amostras do espectro $X(\omega)$ do sinal, ou seja,

$$f_s = \frac{1}{T}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad \Longrightarrow \quad N_0 = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{f_0} = \frac{1/T}{1/T_0}$$

- Se $x(kT)$ é a k -ésima amostra de $x(t)$ e $X(r\omega_0)$ é a r -ésima amostra de $X(\omega)$, definem-se

$$x_k = Tx(kT) = \frac{T_0}{N_0} x(kT), \quad X_r = X(r\omega_0), \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Transformada Discreta de Fourier — DFT

As equações que relacionam x_k e X_r são dadas por^a

$$X_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} x_k \exp(-jr \frac{2\pi}{N_0} k)$$

$$x_k = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r \exp(jr \frac{2\pi}{N_0} k)$$

^aA soma pode ser feita em quaisquer N_0 valores sucessivos das amostras.

Par DFT: $x_k \Longleftrightarrow X_r$

- A DFT (e a inversa da DTF) podem ser usadas para calcular os valores das amostras de $X(\omega)$ a partir das amostras de $x(t)$, e vice-versa.

Note que

- x_k é uma função de $k = 0, \dots, N_0 - 1$.
- X_r é uma função de $r = 0, \dots, N_0 - 1$.
- x_k e X_r são sequências periódicas de período N_0 .

Prova da relação entre x_k e X_r

O sinal amostrado obtido a partir de $x(t)$ pode ser descrito como

$$x_a(t) = \sum_{k=0}^{N_0-1} x(kT) \delta(t - kT)$$

cuja transformada de Fourier é

$$X_a(\omega) = \sum_{k=0}^{N_0-1} x(kT) \exp(-jk\omega T)$$

Assumindo um *aliasing* negligenciável, no intervalo $|\omega| \leq \omega_s/2$ tem-se

$$X(\omega) = TX_a(\omega) = T \left(\sum_{k=0}^{N_0-1} x(kT) \exp(-jk\omega T) \right), \quad |\omega| \leq \omega_s/2$$

Assim,

$$X(\omega) = T \sum_{k=0}^{N_0-1} x(kT) \exp(-jk\omega T), \quad |\omega| \leq \omega_s/2$$

e

$$X_r = X(r\omega_0) = T \sum_{k=0}^{N_0-1} x(kT) \exp(-jkr\omega_0 T)$$

Como $x_k = Tx(kT)$ e $\omega_0 T = 2\pi f_0 T = 2\pi(1/T_0)T = 2\pi/N_0$, tem-se

$$X_r = X(r\omega_0) = \sum_{k=0}^{N_0-1} x_k \exp(-jr \frac{2\pi}{N_0} k)$$

A prova da transformação inversa pode ser feita de maneira similar, trocando os papéis de t e ω , ou então multiplicando a expressão

$$X_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} x_k \exp(-jr \frac{2\pi}{N_0} k)$$

por $\exp(jm(2\pi/N_0)r)$ e somando em r , $r = 0, \dots, N_0 - 1$ para obter

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r \exp(jm \frac{2\pi}{N_0} r) &= \sum_{r=0}^{N_0-1} \left(\sum_{k=0}^{N_0-1} x_k \exp(-jr \frac{2\pi}{N_0} k) \right) \exp(jm \frac{2\pi}{N_0} r) \\ &= \sum_{r=0}^{N_0-1} \left(\sum_{k=0}^{N_0-1} x_k \exp(j(m-k) \frac{2\pi}{N_0} r) \right) \end{aligned}$$

Trocando a ordem das somatórias, tem-se

$$\sum_{r=0}^{N_0-1} X_r \exp(jm \frac{2\pi}{N_0} r) = \sum_{k=0}^{N_0-1} x_k \left(\sum_{r=0}^{N_0-1} \exp(j(m-k) \frac{2\pi}{N_0} r) \right)$$

O termo entre parênteses do lado direito, para $m = k$, é igual a

$$\sum_{r=0}^{N_0-1} 1 = N_0$$

e, para os demais valores de $m \neq k$

$$\sum_{r=0}^{N_0-1} \rho^r = \frac{1 - \rho^{N_0}}{1 - \rho} = 0, \quad \rho = \exp(j(m - k)\frac{2\pi}{N_0}), \quad \rho^{N_0} = 1$$

Portanto,

$$\sum_{r=0}^{N_0-1} X_r \exp(jk\frac{2\pi}{N_0}r) = x_k N_0 \quad \implies \quad x_k = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r \exp(jk\frac{2\pi}{N_0}r)$$



Dado um conjunto de N_0 pontos x_k , $k = 0, \dots, N_0 - 1$, tem-se

$$X_0 = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{N_0-1}$$

$$X_1 = x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \dots + \omega^{N_0-1} x_{N_0-1}$$

$$X_2 = x_0 + \omega^2 x_1 + \omega^4 x_2 + \dots + \omega^{2(N_0-1)} x_{N_0-1}$$

$$\vdots$$

$$X_{N_0-1} = x_0 + \omega^{N_0-1} x_1 + \omega^{2(N_0-1)} x_2 + \dots + \omega^{(N_0-1)(N_0-1)} x_{N_0-1}$$

$$\omega = \exp(-j \frac{2\pi}{N_0})$$

Ou, escrevendo na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N_0-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N_0-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N_0-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N_0-1} & \omega^{2(N_0-1)} & \cdots & \omega^{(N_0-1)(N_0-1)} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz DFT}} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N_0-1} \end{bmatrix}$$

Com ω expressando a raiz N_0 da unidade

$$\omega = \exp(-j \frac{2\pi}{N_0})$$

- A matriz DFT é simétrica
- Os elementos $\text{DFT}_{\ell k}$ da matriz são dados por $\omega^{\ell k}$
- As colunas são ortogonais, i.e.,

$$\begin{bmatrix} \omega^{1k} \\ \omega^{2k} \\ \omega^{3k} \\ \vdots \\ \omega^{(N_0-1)k} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \omega^{1\ell} \\ \omega^{2\ell} \\ \omega^{3\ell} \\ \vdots \\ \omega^{(N_0-1)\ell} \end{bmatrix} = 0$$

$$\omega = \exp(-j\frac{2\pi}{N_0})$$

Por exemplo, para $N_0 = 4$, tem-se

$$\omega = -j, \quad \omega^2 = -1, \quad \omega^3 = j, \quad \omega^4 = 1, \quad \omega^6 = -1, \quad \omega^9 = -j,$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Das definições de x_k e X_r , observa-se que

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N_0-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N_0} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \dots & \omega^{-(N_0-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \dots & \omega^{-2(N_0-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N_0-1)} & \omega^{-2(N_0-1)} & \dots & \omega^{-(N_0-1)(N_0-1)} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz iDFT}} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N_0-1} \end{bmatrix}$$

$$\omega = \exp(-j \frac{2\pi}{N_0})$$

$$\omega = \exp(-j\frac{2\pi}{N_0})$$

Por exemplo, para $N_0 = 4$, tem-se

$$\omega^{-1} = j, \quad \omega^{-2} = -1, \quad \omega^{-3} = j, \quad \omega^{-4} = 1, \quad \omega^{-6} = -1, \quad \omega^{-9} = j,$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} \\ 1 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \omega^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

FFT (Fast Fourier Transform)

- Explorando a linearidade da transformada de Fourier (e da DFT), pode-se calcular a transformada de Fourier de um sinal $x(t)$ como sendo a soma de transformadas de Fourier de segmentos de $x(t)$.
- O algoritmo é baseado na divisão de uma sequência de dados com N_0 pontos em duas sequências de $N_0/2$ amostras pares e $N_0/2$ amostras ímpares.
- O algoritmo é simplificado escolhendo-se N_0 como uma potência de 2.
- Para um conjunto de N_0 pontos, denota-se

$$\omega_{N_0} = \exp(-j\frac{2\pi}{N_0}), \quad X_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} x_k \omega_{N_0}^{kr}, \quad x_k = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r \omega_{N_0}^{-kr}$$

Considere x_k , $k = 0, \dots, N_0 - 1$ (N_0 pontos) separado em duas sequências de $N_0/2$ elementos, constituídos de amostras de índices ímpares e pares

$$\underbrace{x_0, x_2, x_4, \dots, x_{N_0-2}}_{\text{sequência } g_k} \quad \underbrace{x_1, x_3, x_5, \dots, x_{N_0-1}}_{\text{sequência } h_k}$$

Portanto,

$$X_r = \sum_{k=0}^{(N_0/2)-1} x_{2k} \omega_{N_0}^{2kr} + \sum_{k=0}^{(N_0/2)-1} x_{2k+1} \omega_{N_0}^{(2k+1)r}$$

Além disso, como

$$\omega_{N_0}^2 = \exp(-j \frac{4\pi}{N_0}) = \exp(-j \frac{2\pi}{N_0/2}) = \omega_{N_0/2}$$

tem-se

$$X_r = \sum_{k=0}^{(N_0/2)-1} x_{2k} \omega_{N_0/2}^{kr} + \omega_{N_0}^r \sum_{k=0}^{(N_0/2)-1} x_{2k+1} \omega_{N_0/2}^{kr} \quad (1)$$

$$X_r = G_r + \omega_{N_0}^r H_r, \quad 0 \leq r \leq N_0 - 1$$

Note que G_r e H_r são as DFTs de $N_0/2$ pontos das sequências g_k (pares) e h_k (ímpares), ambas com período $N_0/2$. Portanto,

$$G_{r+N_0/2} = G_r, \quad H_{r+N_0/2} = H_r$$

e, além disso,

$$\omega_{N_0}^{r+N_0/2} = \omega_{N_0}^{N_0/2} \omega_{N_0}^r = \exp(-j\pi) \omega_{N_0}^r = -\omega_{N_0}^r$$

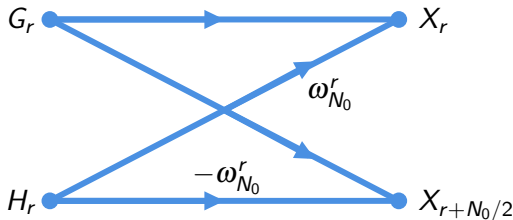
Assim,

$$X_{r+N_0/2} = G_r - \omega_{N_0}^r H_r \quad (2)$$

Esta propriedade pode ser utilizada para reduzir o número de cálculos, pois pode-se computar os primeiros $N_0/2$ pontos ($0 \leq r \leq N_0/2 - 1$) de X_r como em (1) e os últimos $N_0/2$ pontos como em (2)

$$X_r = G_r + \omega_{N_0}^r H_r, \quad X_{r+N_0/2} = G_r - \omega_{N_0}^r H_r, \quad 0 \leq r \leq N_0/2 - 1$$

Portanto, uma DFT de N_0 pontos pode ser computada combinando duas DFTs de $N_0/2$ pontos, como representado abaixo (estrutura conhecida como *borboleta*)



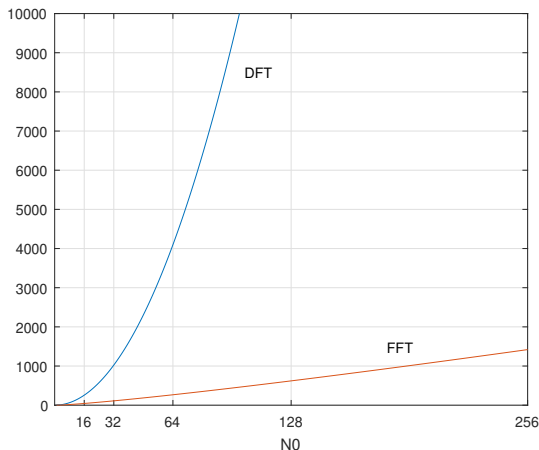
Para calcular as DFTs de $N_0/2$ pontos G_r e H_r , as sequências g_k e h_k são divididas em duas sequências de $N_0/4$ pontos correspondentes às amostras pares e ímpares.

O procedimento é repetido até que se calcule a DFT de um ponto.

A obtenção da iDFT segue um procedimento idêntico, porém com $\omega_{N_0}^{-1}$

Redução da complexidade

As operações necessárias para se obter X_r a partir de x_k (e vice-versa) pela multiplicação que envolve a matriz DFT são da ordem $\mathcal{O}(N_0^2)$. Com a FFT, reduzem-se a $\mathcal{O}(N_0 \log_2 N_0)$.



O procedimento explora as propriedades das raízes de ordem N_0 do círculo unitário, como ilustrado abaixo para $N_0 = 16$

