

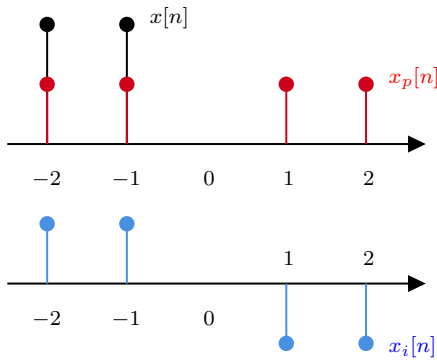
Sinais Discretos e Convolução — Exercícios

1) Considere o sinal discreto $x[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n+2]$

a) Escreva $x[n]$ como a soma de um sinal par $x_p[n]$ mais um sinal ímpar $x_i[n]$

$$x_p[n] = \delta[n+1] + \delta[n+2] + \delta[n-1] + \delta[n-2], \quad x_i[n] = \delta[n+1] + \delta[n+2] - \delta[n-1] - \delta[n-2],$$

b) Esboce $x_p[n]$ e $x_i[n]$



2) Considere o sinal discreto $x[n] = 2(u[n+1] - u[n-2])$

a) Esboce $y[n] = x[3-n]$

b) Escreva $y[n]$ como a soma de um sinal par $y_p[n]$ mais um sinal ímpar $y_i[n]$

c) Esboce $y_p[n]$ e $y_i[n]$

$$\begin{aligned} x[n] &= 2(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]), & x[n+3] &= 2(\delta[n+4] + \delta[n+3] + \delta[n+2]) \\ y[n] &= x[-n+3] = 2(\delta[-n+4] + \delta[-n+3] + \delta[-n+2]) = 2(\delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]) \\ y[n] &= y_p[n] + y_i[n] \\ y_p[n] &= \delta[n+4] + \delta[n+3] + \delta[n+2] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] \\ y_i[n] &= -\delta[n+4] - \delta[n+3] - \delta[n+2] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] \end{aligned}$$

3) Considere os sinais discretos $x[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n-1]$ e $y[n] = x[-n+2]$

$$x[n+2] = 2\delta[n+2] + 2\delta[n+1], \quad y[n] = 2(\delta[n-1] + \delta[n-2])$$

a) Esboce $y[n]$

b) Escreva $y[n]$ como a soma de um sinal par $y_p[n]$ mais um sinal ímpar $y_i[n]$ e esboce $y_p[n]$ e $y_i[n]$

$$y[n] = \underbrace{\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n-1] + \delta[n-2]}_{y_p[n]} + \underbrace{(-\delta[n+2] - \delta[n+1] + \delta[n-1] + \delta[n-2])}_{y_i[n]}$$

4) Considere $x[n]$ e $y[n]$ dados por

$$x[n] = \delta[n+1] - \delta[n] + u[n-1] - u[n-2] \quad , \quad y[n] = x[4-2n]$$

Escreva $y[n]$ na forma de soma de impulsos e impulsos deslocados, isto é, determine a_k, b_k tais que

$$y[n] = \sum_k a_k \delta[n - b_k] \quad , \quad b_k \in \mathbb{Z} \quad , \quad a_k \in \mathbb{R}$$

$$x[n] = \delta[n+1] - \delta[n] + \delta[n-1], \quad y[n] = \delta[2n-5] - \delta[2n-4] + \delta[2n-3] = -\delta[n-2]$$

5) Determine

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (3n-1)^2 \delta[2n+3]$$

A soma é igual a zero pois não existe n inteiro tal que $2n+3=0$

6) Considere o sistema $y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\}$ descrito pela equação a diferenças

$$y[n+1] + \frac{1}{4}y[n] = x[n+1] - x[n-1]$$

a) Determine $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \quad , \quad h[n] = \mathcal{G}\{\delta[n]\}$$

A equação a diferenças descreve um sistema linear invariante no tempo, com auto-função z^n , ou seja, para $x[n] = z^n$ a saída é dada por $y[n] = H(z)z^n$, e $H(z)$ é a função de transferência. Assim,

$$H(z)z^{n+1} + \frac{1}{4}H(z)z^n = z^{n+1} - z^{n-1} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{z - z^{-1}}{z + 1/4}$$

b) Determine o módulo e a fase de $H(z)$ em $z = \exp(j\pi/3)$.

$$H(\exp(j\pi/3)) = \frac{\exp(j\pi/3) - \exp(-j\pi/3)}{\exp(j\pi/3) + 0.25} = \frac{j\sqrt{3}}{\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$|H(\exp(j\pi/3))| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{21}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{7}}, \quad \angle H(\exp(j\pi/3)) = 0.7137$$

c) Determine a saída $y[n]$ em regime para

$$x[n] = 3 \sin(2n) + \frac{1}{3} \cos(\pi n/2)$$

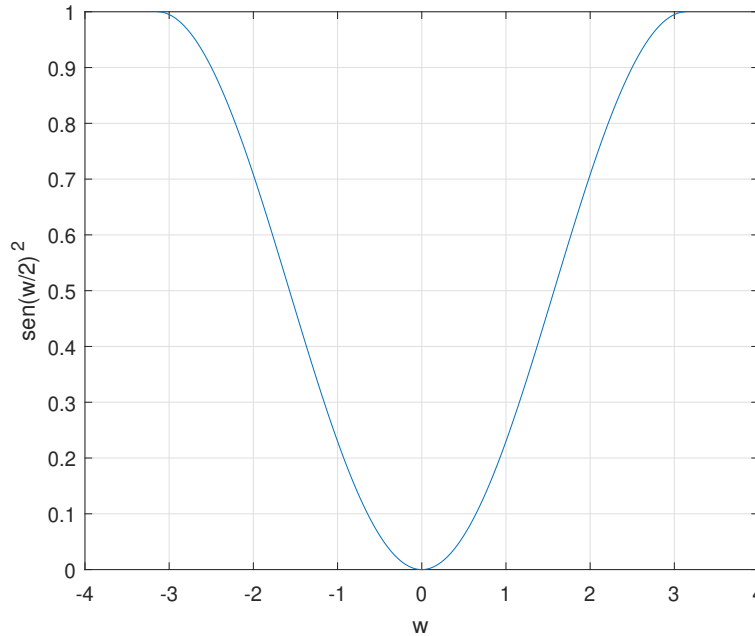
$$y_f[n] = 3|H(\exp(j2))| \sin(2n + \angle H(\exp(j2))) + \frac{1}{3}|H(\exp(j\pi/2))| \cos(\pi n/2 + \angle H(\exp(j2)))$$

7) Esboce o módulo de $H(z)|_{z=\exp(j\omega)}$ para $\omega \in (-\pi, +\pi)$, sendo $H(z)$ a transformada Z da resposta ao impulso do sistema discreto descrito por

$$y[n] = \frac{x[n+1] - 2x[n] + x[n-1]}{4}$$

$$H(z) = \frac{z - 2 + z^{-1}}{4}, \quad H(\exp(j\omega)) = \frac{\exp(j\omega) - 2 + \exp(-j\omega)}{4} = -\sin^2(\omega/2)$$

$$|H(\exp(j\omega))| = \sin^2(\omega/2), \quad \angle H(\exp(j\omega)) = \pi$$



8) Determine e esboce

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

para

$$x_1[n] = u[n] - u[n-1] - u[n-2] + u[n-3], \quad x_2[n] = u[n-1] - u[n-2]$$

$$x_1[n] = \delta[n] - \delta[n-2], \quad x_2[n] = \delta[n-1]$$

$$(\delta[n] - \delta[n-2]) * \delta[n-1] = \delta[n-1] - \delta[n-3]$$

9) a) Determine a função de transferência $H(z)$ de um sistema linear invariante no tempo $y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\}$ descrito por

$$y[n+1] = v[n] + x[n], \quad v[n+1] = -2v[n] - 2y[n] + 2x[n+1] - x[n]$$

b) Determine a saída forçada $y[n]$ do sistema para a entrada $x[n] = 10(2^n) - 25(3^{-n})$

Usando a notação $py = y[n+1]$, reescrevendo as equações e eliminando $v[n]$, tem-se

$$(p^2 + 2p + 2)y = (3p + 1)x$$

e, aplicando o conceito de auto-função (para $x[n] = z^n$, tem-se $y[n] = H(z)z^n$), chega-se a

$$H(z) = \frac{3z + 1}{z^2 + 2z + 2}$$

A saída forçada é dada por

$$y_f[n] = 10H(2)(2^n) - 25H(1/3)(1/3)^n = 7(2^n) - 18(1/3)^n$$

10) Determine e esboce a convolução de $g[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$ com a resposta ao impulso do sistema

$$y[n] = \sum_{k=n-2}^n x[k] \Rightarrow h[n] = \delta[n-2] + \delta[n-1] + \delta[n]$$

$$(\delta[n+1] - \delta[n-1]) * (\delta[n-2] + \delta[n-1] + \delta[n]) = \delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

11) Considere o sistema $y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\}$ descrito pela equação a diferenças

$$y[n+1] - \frac{1}{2}y[n] = \frac{1}{2}x[n+1] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

a) Determine $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}, \quad h[n] = \mathcal{G}\{\delta[n]\}$$

b) Determine o módulo e a fase em $z = \exp(j\pi/5)$ de $H(z)$.

c) Determine a saída $y[n]$ em regime para

$$x[n] = 3 \sin(3n) + \frac{1}{3} \cos(\pi n/3)$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^{-1}}{z - \frac{1}{2}} = \frac{z - z^{-1}}{2z - 1}$$

$$|H(\exp(j\pi/5))| = 0.8851, \quad \angle H(\exp(j\pi/5)) = 0.4840$$

$$y_f[n] = 3|H(\exp(j3))| \sin(3n + \angle H(\exp(j3))) + \frac{1}{3}|H(\exp(j\pi/3))| \cos(\pi n/3) + \angle H(\exp(j\pi/3))$$

12) Determine e esboce a convolução de

$$g[n] = u[n+1] - u[n-2]$$

com a resposta ao impulso do sistema definido por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k], \quad h[n] = u[n] - u[n-2]$$

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1], \quad g[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$h[n] * g[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

13) Determine o módulo $M(\omega)$ de $H(z = \exp(j\omega))$ para $\omega = \pi/2$, sendo $H(z)$ a transformada Z da resposta ao impulso do sistema discreto descrito por

$$y[n+2] - 4y[n+1] + 4y[n] = x[n]$$

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 4}, \quad |H(\exp(j\pi/2))| = \left| \frac{1}{3 - 4j} \right| = \frac{1}{5}$$

14) Considere o sistema discreto descrito por

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

a) Determine $y[n]$ para $x[n] = 1$ e para $x[n] = (-1)^n$

b) Esboce o módulo de $H(z)|_{z=\exp(j\omega)}$ para ω entre $-\pi$ e $+\pi$, sendo $H(z)$ a transformada Z da resposta ao impulso do sistema.

a) Para $x[n] = 1$, a saída é $y[n] = 0$; para $x[n] = (-1)^n$, a saída é $y[n] = (-1)^n$ (filtro passa-altas)

b) $H(z) = (1 - z^{-1})/2$ e, portanto

$$H(\exp(j\omega)) = \frac{1 - \exp(-j\omega)}{2} = \frac{(\exp(j\omega/2) - \exp(-j\omega/2)) \exp(-j\omega/2)}{2} = \sin(\omega/2) \exp(-j\omega/2 + \pi/2)$$

$$|H(\exp(j\omega))| = |\sin(\omega/2)|, \quad \angle H(\exp(j\omega)) = \frac{\pi}{2} \text{ sinal}(\omega) - \frac{\omega}{2}$$

15) a) Determine $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$, para

$$x_1[n] = u[n+2] - u[n] \quad , \quad x_2[n] = -\delta[n+1] + \delta[n-2]$$

e escreva $y[n]$ na forma de soma de impulsos e impulsos deslocados, isto é, determine a_k, b_k tais que

$$y[n] = \sum_k a_k \delta[n - b_k] \quad , \quad b_k \in \mathbb{Z} \quad , \quad a_k \in \mathbb{R}$$

b) Determine a expressão e esboce $x[n] * y[n]$ para

$$x[n] = \delta[n+1] + 2(u[n-1] - u[n-3]) \quad , \quad y[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n-1]$$

c) Determine e esboce $x_1[n] * x_2[n]$ para

$$x_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n+1] \quad , \quad x_2[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$$

a) $x_1[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1]$ e $x_2[n] = -\delta[n+1] + \delta[n-2]$

$$(\delta[n+2] + \delta[n+1]) * (-\delta[n+1] + \delta[n-2]) = -\delta[n+3] - \delta[n+2] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

b) $x[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$ e

$$\begin{aligned} x[n] * y[n] &= (\delta[n+1] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2]) * (\delta[n+1] - 2\delta[n-1]) \\ &= \delta[n+2] + 2\delta[n-1] - 4\delta[n-2] - 4\delta[n-3] \end{aligned}$$

c) $(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n+1]) * (\delta[n+1] - \delta[n-1]) = \delta[n+2] + \delta[n+1] - \delta[n-1] - \delta[n-2]$

16) Considere o sistema descrito por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \exp(-n+k)u[n-k]$$

a) O sistema é causal? b) O sistema é BIBO estável? (Dica: calcule a resposta ao impulso)

Como

$$h[n] = \exp(-n)u[n], \quad y[n] = h[n] * x[n]$$

tem-se que o sistema é linear e invariante no tempo. Nesse caso, $h[n] = 0$, $n < 0$ implica que o sistema é causal e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\exp(-n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1 - (1/e)} = \frac{e}{e-1} < +\infty$$

indica que o sistema é BIBO estável.

17) Considere o sistema descrito por $y[n] = x[n] * (\alpha^{(n-1)}u[n-1])$, $|\alpha| < 1$

a) O sistema é linear? b) O sistema é invariante no tempo? c) O sistema é causal?

d) O sistema é BIBO estável?

Sistema linear e invariante no tempo, pois $h[n] = (\alpha^{(n-1)}u[n-1])$ e $y[n] = x[n] * h[n]$. Como $h[n] = 0$, $n < 0$, o sistema é causal BIBO estável, pois

$$|\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha^{(n-1)}u[n-1]| < +\infty$$

18) Considere o sistema $y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\}$ descrito por

$$y[n] = \sum_{k=-2}^n kx[k+2]$$

Classifique o sistema, justificando a resposta, quanto a: a) linear ou não linear; b) causal ou não causal; c) variante ou invariante no tempo; d) BIBO estável ou não BIBO estável

Linear, pois $\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$ produz como saída

$$\sum_{k=-2}^n k(\alpha_1 x_1[k+2] + \alpha_2 x_2[k+2]) = \alpha_1 \sum_{k=-2}^n kx_1[k+2] + \alpha_2 \sum_{k=-2}^n kx_2[k+2] = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$$

Variante no tempo, pois para $x_1[n]$ e $x_2[n] = x_1[n-\ell]$ tem-se

$$y_1[n] = \sum_{k=-2}^n kx_1[k+2], \quad y_2[n] = \sum_{k=-2}^n kx[k+2-\ell]$$

Não é causal, pois para se obter $y[n]$ é preciso conhecer as entradas $x[n+1]$ e $x[n+2]$. Não é BIBO-estável, pois para entradas limitadas $|x[n+2]| \leq b$ as saídas crescem linearmente com o aumento de n .

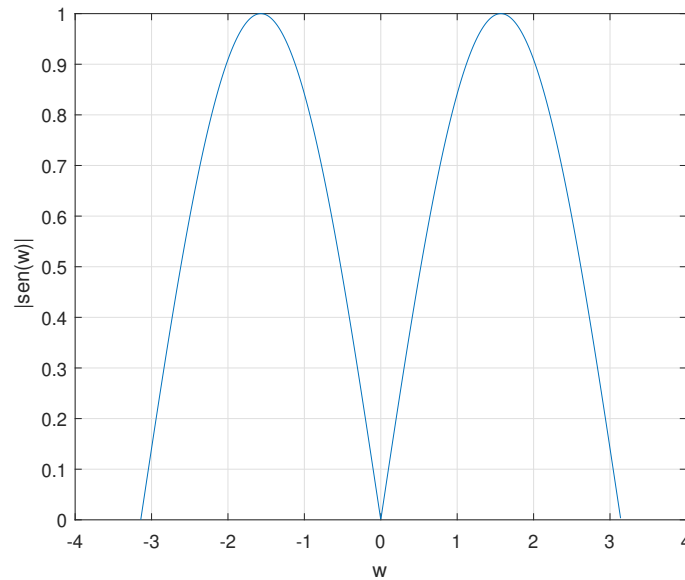
19) a) Determine e esboce o módulo de $H(z)$ para o sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n+1] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

sendo $x[n] = z^n$ e $y[n] = H(z)z^n$, para $z = \exp(j\omega)$, com ω entre $-\pi$ e $+\pi$.

b) Determine e esboce a fase de $H(z)$ c) Determine $y[n]$ para $x[n] = \sin(2n) + \cos(3n)$

a) $H(z) = \frac{z - z^{-1}}{2}$, $H(\exp(j\omega)) = \frac{\exp(j\omega) - \exp(-j\omega)}{2} = j \sin(\omega) \Rightarrow |H(\exp(j\omega))| = |\sin(\omega)|$



b) $H(\exp(j\omega)) = j \sin(\omega) = \sin(\omega) \exp(j\pi/2) \Rightarrow \angle H(\exp(j\omega)) = \frac{\pi}{2} \text{ sinal}(\omega)$

c) Note que a fase é $\pi/2$ para qualquer $0 < \omega \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} y_f[n] &= |H(\exp(j2))| \sin(2n + \angle H(\exp(j2))) + |H(\exp(j3))| \cos(3n + \angle H(\exp(j3))) \\ &= 0.9093 \sin(2n + \pi/2) + 0.1411 \cos(3n + \pi/2) \end{aligned}$$

20) a) Determine $H(z)$ para o sistema $y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\}$ descrito pela equação a diferenças

$$y[n+1] - \alpha y[n] = x[n+2] - x[n-2], \quad |\alpha| < 1$$

$$H(z) = \frac{z^2 - z^{-2}}{z - \alpha}$$

b) Determine o módulo e a fase em $z = \exp(j\pi/5)$ de $H(z)$ para o sistema $y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\}$ descrito pela equação a diferenças

$$y[n+1] - 0.5y[n] = x[n+2] - x[n-2]$$

$$H(z) = \frac{z^2 - z^{-2}}{z - 0.5} \Rightarrow |H(\exp(j\pi/5))| = 2.8643, \quad \angle H(\exp(j\pi/5)) = 0.4840$$

c) Determine a saída $y[n]$ em regime do sistema do item b) para $x[n] = 30 \sin(2n) + (1/3) \cos(\pi n/2)$

$$\begin{aligned} y_f[n] &= 30|H(\exp(j2))| \sin(2n + \angle H(\exp(j2))) + (1/3)|H(\exp(j\pi/2))| \cos(\pi n/2 + \angle H(\exp(j\pi/2))) \\ &= 30(1.1726) \sin(2n + 2.3524) \end{aligned}$$

pois $H(\exp(j\pi/2)) = 0$.

21) a) Determine a resposta ao impulso do sistema descrito por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (n-k)x[k]u[n-k]$$

b) Classifique quanto à: linearidade, invariância no tempo, causalidade e BIBO estabilidade.

Como $h[n] = nu[n]$ e $y[n] = z[n] * h[n]$, o sistema é linear e invariante no tempo. É causal ($h[n] = 0$, $n < 0$) e não é BIBO-estável, pois

$$\sum_{n=0}^n |n| \rightarrow +\infty$$

22) Considere o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$y[n] = x[n] * (\rho^{-n}u[n]), \quad 0 < \rho < 1$$

Classifique o sistema, justificando a resposta, quanto a:

a) BIBO-estável ou não BIBO-estável; b) causal ou não causal

Sistema linear invariante no tempo, pois $h[n] = \rho^{-n}u[n]$ e $y[n] = x[n] * h[n]$. É causal ($h[n] = 0$, $n < 0$) e não é BIBO-estável, pois para $0 < \rho < 1$

$$\sum_{n=0}^n |\rho^{-n}| \rightarrow +\infty$$

23) a) Determine a resposta ao impulso do sistema descrito por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k-1)u[k-1]x[n-k]$$

b) Classifique o sistema quanto à: linearidade, invariância no tempo, causalidade e BIBO estabilidade.

A resposta ao impulso é

$$h[n] = (n-1)u[n-1]$$

Como $y[n] = x[n] * h[n]$, o sistema é linear e invariante no tempo. É causal, pois $h[n] = 0$, $n < 0$ e não BIBO estável, pois

$$\sum_{n=0}^n |n-1| \rightarrow +\infty$$

24) Classifique os sistemas quanto à linearidade e invariância no tempo

$$\text{a) } y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2} \quad \text{b) } y[n] = 2^{-n}(x[n] + x[n-1])$$

a) Linear (vale a superposição) e invariante no tempo; b) Linear (vale a superposição), variante no tempo pois para $x[n-\ell]$, tem-se

$$y[n] = 2^{-n}(x[n-\ell] + x[n-\ell-1]) \neq y[n-\ell] = 2^{-(n-\ell)}(x[n-\ell] + x[n-\ell-1])$$

25) Classifique os sistemas quanto à linearidade e invariância no tempo

$$\text{a) } y[n] = \sum_{k=n-1}^n 2^{-1}x[k] \quad \text{b) } y[n] = \sum_{k=n-1}^n 2^{-k}x[k]$$

a) Linear (vale a superposição) e invariante no tempo. Note que

$$y[n] = \sum_{k=n-1}^n 2^{-1}x[k] = 2^{-1}(x[n-1] + x[n])$$

b) Linear (vale a superposição), variante no tempo pois para $x[n-\ell]$, tem-se

$$y[n] = \sum_{k=n-1}^n 2^{-k}x[k-\ell] = 2^{-(n-1)}x[n-1-\ell] + 2^{-n}x[n-\ell]$$

que é diferente de

$$y[n-\ell] = \sum_{k=n-\ell-1}^{n-\ell} 2^{-k}x[k] = 2^{-(n-\ell-1)}x[n-1-\ell] + 2^{-(n-\ell)}x[n-\ell]$$

c) Esboce a convolução de $g[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ com a resposta ao impulso do sistema definido no item a).

$$\left(\frac{\delta[n-1] + \delta[n]}{2}\right) * (\delta[n] - \delta[n-1]) = \frac{\delta[n]}{2} - \frac{\delta[n-2]}{2}$$

26) Considere o sistema discreto dado por

$$y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\} = \max_{k \in \{n-1, n, n+1\}} |x[k]|$$

Classifique o sistema, justificando a resposta, quanto a:

a) Linear ou não linear; b) causal ou não causal

Não linear, pois a soma do máximo dos módulos não é igual ao módulo da soma. Não causal, pois para o cálculo de $y[n]$ é preciso conhecer $x[n+1]$.