

Ortogonalização — Exercícios

1) Determine a para que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam ortogonais entre si, sendo

$$x_1(t) = G_2(t) \quad , \quad x_2(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 - a\right)G_2(t)$$

Impondo a restrição de ortogonalidade, tem-se

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle &= \int_{-1}^{+1} \left(\frac{3}{2}t^2 - a\right) dt = \left(\frac{t^3}{2} - at\right)_{-1}^{+1} = \frac{1}{2} - a - \left(-\frac{1}{2} + a\right) = 0 \\ \Rightarrow \quad 1 - 2a &= 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2) Determine a para que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam ortogonais entre si, sendo

$$x_1(t) = (1-t)G_1(t-0.5) \quad , \quad x_2(t) = (at+1)G_1(t-0.5)$$

Impondo a restrição de ortogonalidade, tem-se

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle &= \int_0^{+1} (1-t)(at+1) dt = \int_0^{+1} (-at^2 + (a-1)t + 1) dt = \left(\frac{-at^3}{3} + (a-1)\frac{t^2}{2} + t\right)_0^{+1} \\ &= \frac{-a}{3} + \frac{a-1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \quad -2a + 3a - 3 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3 \end{aligned}$$

3) Determine a e b para que $x_3(t)$ seja ortogonal a $x_1(t)$ e a $x_2(t)$ sendo

$$x_1(t) = G_1(t-0.5) \quad , \quad x_2(t) = tG_1(t-0.5) \quad , \quad x_3(t) = \left(at^2 + bt - \frac{1}{6}\right)G_1(t-0.5)$$

Todos os sinais estão definidos no intervalo $(0, 1)$. Assim, as restrições de ortogonalidade impõem

$$x_3 \perp x_1 \quad \Rightarrow \quad \langle x_3 x_1^* \rangle = \int_0^1 \left(at^2 + bt - \frac{1}{6}\right)(1) dt = \left(\frac{at^3}{3} + b\frac{t^2}{2} - \frac{t}{6}\right)_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} - \frac{1}{6} = 0$$

$$x_3 \perp x_2 \quad \Rightarrow \quad \langle x_3 x_1^* \rangle = \int_0^1 \left(at^2 + bt - \frac{1}{6}\right)(t) dt = \left(\frac{at^4}{4} + b\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{12}\right)_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{1}{12} = 0$$

Escrevendo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} (1/3) & (1/2) \\ (1/4) & (1/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/6) \\ (1/12) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = -1, \quad b = 1$$

4) Determine a projeção de erro quadrático mínimo do sinal $x(t)$ na base formada pelos sinais $f_1(t)$ e $f_2(t)$, isto é, determine α e β tais que

$$x(t) = (2-t)G_2(t-1) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) + \epsilon(t) \quad , \quad f_1(t) = G_2(t-1) \quad , \quad f_2(t) = G_1(t-1.5)$$

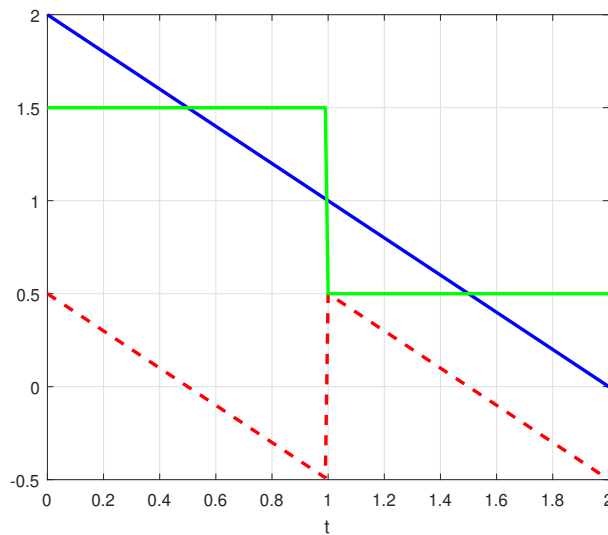
sendo $\epsilon(t)$ o erro de projeção.

$$\epsilon(t) = x(t) - \alpha f_1(t) - \beta f_2(t)$$

Elevando ao quadrado, integrando no intervalo de interesse $(0, 2)$ e derivando em relação a α e β , chega-se ao sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \langle f_1^2 \rangle & \langle f_1 f_2 \rangle \\ \langle f_1 f_2 \rangle & \langle f_2^2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x f_1 \rangle \\ \langle x f_2 \rangle \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -1$$

A figura a seguir mostra o sinal $x(t)$ (azul), a aproximação dada por $1.5f_1(t) - f_2(t)$ (verde) e o erro (tracejado em vermelho). Note que o erro é ortogonal a $f_1(t)$ e $f_2(t)$



5) Determine o erro $\epsilon(t)$ da projeção de erro quadrático mínimo do sinal $x(t)$ na base formada pelos sinais $f_1(t)$ e $f_2(t)$

$$x(t) = G_3(t - 1.5) + G_2(t - 2) \quad , \quad f_1(t) = G_2(t - 1) \quad , \quad f_2(t) = f_1(t - 1)$$

$$\begin{bmatrix} \langle f_1^2 \rangle & \langle f_1 f_2 \rangle \\ \langle f_1 f_2 \rangle & \langle f_2^2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x f_1 \rangle \\ \langle x f_2 \rangle \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{5}{3}$$

Note que o erro, $e = x - (2/3)f_1 - (5/3)f_2$, é dado por

$$\epsilon(t) = G_3(t - 1.5) + G_2(t - 2) - (2/3)G_2(t - 1) - (5/3)G_2(t - 2) = \frac{1}{3}G_1(t - 0.5) - \frac{1}{3}G_1(t - 1.5) + \frac{1}{3}G_1(t - 2.5)$$

é ortogonal a f_1 e f_2 ($\langle \epsilon f_1 \rangle = 0$, $\langle \epsilon f_2 \rangle = 0$).

6) Determine uma base ortogonal para os sinais, nulos fora do intervalo $(0, 1)$,

$$f_1(t) = t - 1, \quad f_2(t) = 1 - 2t, \quad f_3(t) = 2t + 1$$

Aplicando o procedimento de Ortogonalização de Gram-Schmidt

$$g_1(t) = f_1(t) = t - 1$$

$$g_2(t) = f_2(t) - \frac{\langle f_2 g_1^* \rangle}{\langle g_1 g_1^* \rangle} g_1(t)$$

$$g_3(t) = f_3(t) - \frac{\langle f_3 g_1^* \rangle}{\langle g_1 g_1^* \rangle} g_1(t) - \frac{\langle f_3 g_2^* \rangle}{\langle g_2 g_2^* \rangle} g_2(t)$$

Computando os produtos escalares

$$\langle g_1 g_1^* \rangle = \int_0^1 (t - 1)^2 dt = \int_0^1 (t^2 - 2t + 1) dt = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + t \right)_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\langle f_2 g_1^* \rangle = \int_0^1 (1 - 2t)(t - 1) dt = \int_0^1 (-2t^2 + 3t - 1) dt = \left(-\frac{2t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - t \right)_0^1 = -\frac{1}{6}$$

tem-se

$$g_2(t) = (1 - 2t) - \frac{(-1/6)}{(1/3)}(t - 1) = -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$$

Como pode ser verificado, $g_1(t) \perp g_2(t)$:

$$\langle g_1 g_2^* \rangle = \int_0^1 (t-1)(-3t/2 + 1/2) dt = \int_0^1 \left(-\frac{3t^2}{2} + 2t - \frac{1}{2}\right) dt = \left(-\frac{t^3}{2} + t^2 - \frac{1}{2}t\right) \Big|_0^1 = 0$$

Continuando o procedimento, tem-se

$$\langle g_2 g_2^* \rangle = \int_0^1 (-3t/2 + 1/2)^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{9}{4}t^2 - \frac{6}{4}t + \frac{1}{4}\right) dt = \frac{1}{4} (3t^3 - 3t^2 + t) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\langle f_3 g_1^* \rangle = \int_0^1 (2t+1)(t-1) dt = \int_0^1 (2t^2 - t - 1) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t\right) \Big|_0^1 = -\frac{5}{6}$$

$$\langle f_3 g_2^* \rangle = \int_0^1 (2t+1)(-3t/2 + 1/2) dt = \int_0^1 (-3t^2 - t/2 + 1/2) dt = \left(-t^3 - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}\right) \Big|_0^1 = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} g_3(t) &= (2t+1) - \frac{(-5/6)}{(1/3)}(t-1) - \frac{(-3/4)}{(1/4)}(-3t/2 + 1/2) \\ &= 2t+1 + \frac{5}{2}(t-1) + 3(-3t/2 + 1/2) = 0 \end{aligned}$$

Note que $g_3 = 0$ indica que há apenas dois sinais linearmente independentes no conjunto. De fato,

$$c_1(t-1) + c_2(1-2t) + c_3(2t+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (c_1 - 2c_2 + 2c_3)t + (-c_1 + c_2 + c_3) = 0$$

que possui inúmeras soluções. O mesmo espaço poderia ser gerado por uma base formada pelos sinais $g_1(t) = t$ e $g_2(t) = 1$.

7) Determine uma base ortogonal que represente o espaço de sinais gerado por $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t)$ com

$$x_1(t) = (1+t)G_2(t-1) \quad , \quad x_2(t) = (1-t)G_2(t-1) \quad , \quad x_3(t) = (2t+1)G_2(t-1)$$

Só há dois sinais LI no conjunto, pois

$$c_1(1+t) + c_2(1-t) + c_3(2t+1) = (c_1 + c_2 + c_3) + (c_1 - c_2 + 2c_3)t = 0$$

possui múltiplas soluções. O espaço pode ser representado pela base canônica $g_1(t) = 1$, $g_2(t) = t$.

Uma base ortogonal alternativa pode ser gerada pelo procedimento de Ortogonalização de Gram-Schmidt.

$$g_1(t) = x_1(t) = (1+t)G_2(t-1)$$

$$\langle g_1^2 \rangle = \int_0^2 (1+t)^2 dt = \int_0^2 (t^2 + 2t + 1) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t^2 + t\right) \Big|_0^2 = \frac{26}{3}$$

$$\langle x_2 g_1^* \rangle = \int_0^2 (1-t)(1+t) dt = \int_0^2 (1-t^2) dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^2 = \frac{-2}{3}$$

$$g_2(t) = x_2(t) - \frac{\langle x_2 g_1^* \rangle}{\langle g_1^2 \rangle} g_1 = 1-t - \frac{(-2/3)}{(26/3)}(1+t) = \frac{14}{13} - \frac{12}{13}t$$

$$\begin{aligned} \langle g_2^2 \rangle &= \frac{1}{13^2} \int_0^2 (14-12t)^2 dt = \frac{1}{13^2} \int_0^2 (144t^2 - 336t + 196) dt = \frac{1}{13^2} \left(\frac{144t^3}{3} - 336t^2 + 196t\right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{13^2} (104) = \frac{8}{13} \end{aligned}$$

$$\langle x_3 g_1^* \rangle = \int_0^2 (2t+1)(1+t) dt = \int_0^2 (2t^2 + 3t + 1) dt = \left(\frac{2t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + t\right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3} + 6 + 2 = \frac{40}{3}$$

$$\begin{aligned} \langle x_3 g_2^* \rangle &= \frac{1}{13} \int_0^2 (2t+1)(14-12t) dt = \frac{1}{13} \int_0^2 (-24t^2 + 16t + 14) dt = \frac{1}{13} \left(\frac{-24t^3}{3} + 16\frac{t^2}{2} + 14t \right)_0^2 \\ &= \frac{1}{13} \left(-24\frac{8}{3} + 32 + 28 \right) = \frac{-4}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3(t) &= x_3(t) - \frac{\langle x_3 g_1^* \rangle}{\langle g_1^2 \rangle} g_1 - \frac{\langle x_3 g_2^* \rangle}{\langle g_2^2 \rangle} g_2 = (2t+1) - \frac{(40/3)}{(26/3)}(1+t) - \frac{(-4/13)}{(8/13)} \left(\frac{14}{13} - \frac{12}{13}t \right) \\ &= (2t+1) - \frac{20}{13}(1+t) + \frac{7}{13} - \frac{6}{13}t = 0 \end{aligned}$$

Como esperado, o procedimento comprova que há apenas dois sinais LI no conjunto.

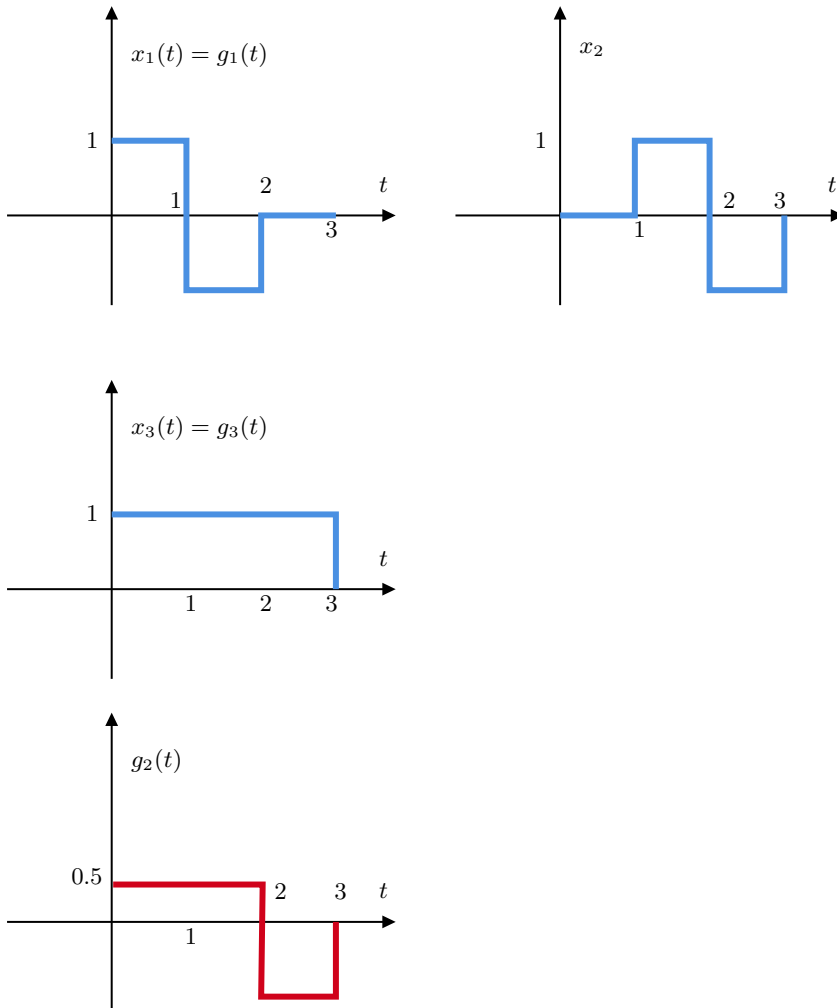
8) Determine uma base ortogonal para o espaço linear gerado pelos sinais

$$x_1(t) = G_1(t-0.5) - G_1(t-1.5) \quad , \quad x_2(t) = G_1(t-1.5) - G_1(t-2.5) \quad , \quad x_3(t) = G_3(t-1.5)$$

Aplicando o procedimento de orthogonalização de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} g_1(t) &= x_1(t) = G_1(t-0.5) - G_1(t-1.5), \quad \langle g_1^2 \rangle = 2, \quad \langle x_2 g_1 \rangle = -1 \\ \Rightarrow \quad g_2(t) &= x_2(t) - \frac{\langle x_2 g_1 \rangle}{\langle g_1^2 \rangle} g_1(t) = x_2(t) + \frac{1}{2} g_1(t) = \frac{1}{2} G_2(t-1) - G_1(t-2.5) \\ g_3(t) &= x_3(t) - \frac{\langle x_3 g_1 \rangle}{\langle g_1^2 \rangle} g_1(t) - \frac{\langle x_3 g_2 \rangle}{\langle g_2^2 \rangle} g_2(t) \\ \langle x_3 g_1 \rangle &= 0, \quad \langle x_3 g_2 \rangle = 0, \quad \langle g_2^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ilustrando os sinais:



Como pode ser verificado,

$$\langle g_1 g_2 \rangle = \langle g_1 g_3 \rangle = \langle g_2 g_3 \rangle = 0$$

9) Determine uma base ortogonal para o espaço gerado pelos sinais

$$x_1(t) = G_1(t - 0.5) \quad , \quad x_2(t) = 2G_1(t - 0.5) + G_1(t - 2.5)$$

Pelo procedimento de Gram-Schmidt,

$$g_1(t) = x_1(t) = G_1(t - 0.5)$$

$$g_2(t) = x_2(t) - \frac{\langle x_2 g_1 \rangle}{\langle g_1^2 \rangle} g_1(t) = x_2(t) - \frac{2}{1} g_1(t) = x_2(t) - 2g_1(t) = G_1(t - 2.5)$$

10) Considere que os m sinais reais $x_k(t)$ são ortogonais entre si no intervalo $(0, T)$ e nulos fora dele com

$$\int_0^T x_k^2(t) dt = T, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Determine a saída do filtro $y(T)$ cuja resposta ao impulso é $h(t) = x_1(T - t)$ para a entrada

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k(t)$$

Supondo que o filtro seja um sistema LIT, tem-se $y(t) = h(t) * x(t)$, ou seja

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(T - \beta) x(t - \beta) d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(T - \beta) \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k(t - \beta) d\beta = \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(T - \beta) x_k(t - \beta) d\beta$$

No instante $t = T$, tem-se

$$y(T) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(T - \beta) x_k(T - \beta) d\beta = \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\xi) x_k(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \langle x_1 x_k \rangle$$

Como os m sinais $x_k(t)$ são ortogonais, tem-se

$$Y(T) = \alpha_1 \langle x_1 x_1 \rangle = \alpha_1 T$$

11) Considere m sinais reais ortonormais tais que

$$x_k(t) = x_k(t) G_1(t - 0.5), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Determine a saída $y(1)$ do filtro cuja resposta ao impulso é $h(t) = x_m(1 - t)$ para a entrada

$$x(t) = \sum_{k=1}^m 2^k x_k(t)$$

Supondo tratar-se de um filtro LIT, tem-se $y(t) = x(t) * h(t)$, ou seja

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_m(1 - \beta) x(t - \beta) d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} x_m(1 - \beta) \sum_{k=1}^m 2^k x_k(t - \beta) d\beta = \sum_{k=1}^m 2^k \int_{-\infty}^{+\infty} x_m(1 - \beta) x_k(t - \beta) d\beta$$

Em $t = 1$, tem-se

$$y(1) = \sum_{k=1}^m 2^k \int_{-\infty}^{+\infty} x_m(1 - \beta) x_k(1 - \beta) d\beta = \sum_{k=1}^m 2^k \int_{-\infty}^{+\infty} x_m(\xi) x_k(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^m 2^k \langle x_m x_k \rangle$$

Como os m sinais $x_k(t)$ são ortonormais ($\langle x_m x_m \rangle = 1$), tem-se

$$Y(1) = 2^m \langle x_m x_m \rangle = 2^m$$