

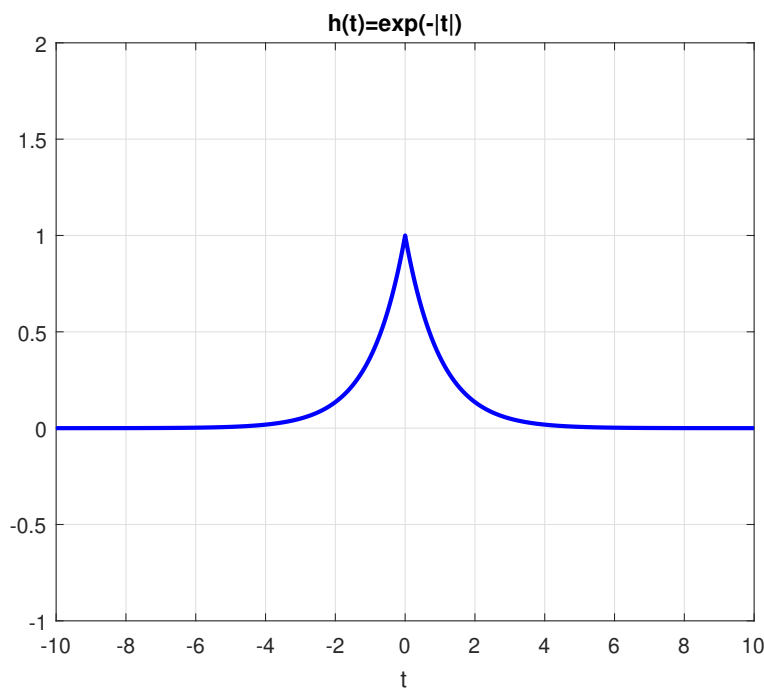
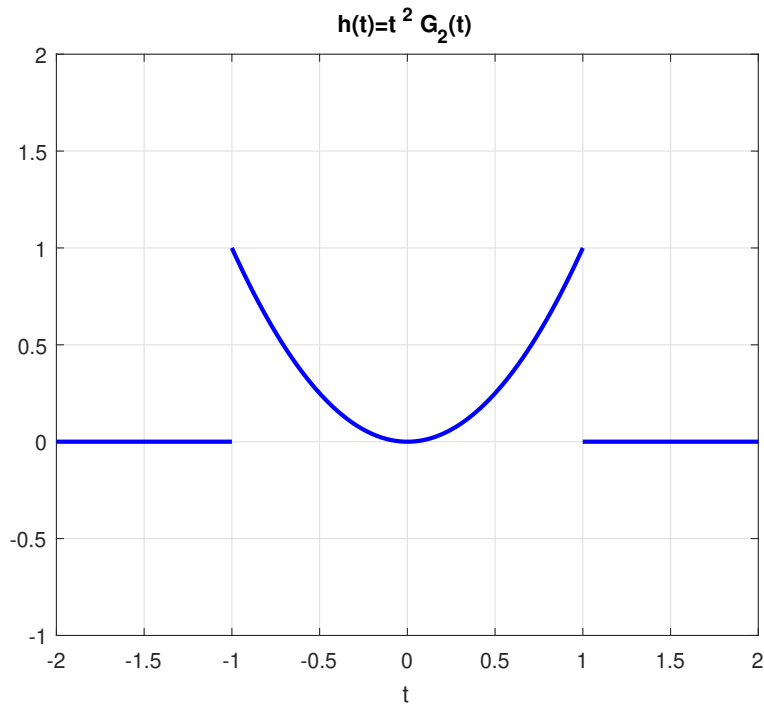
Sinais contínuos e convolução — Exercícios

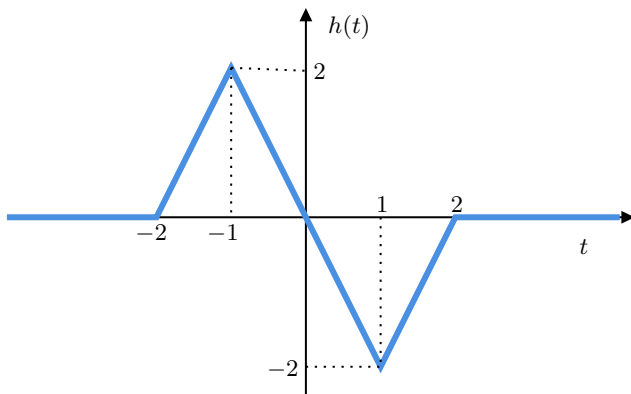
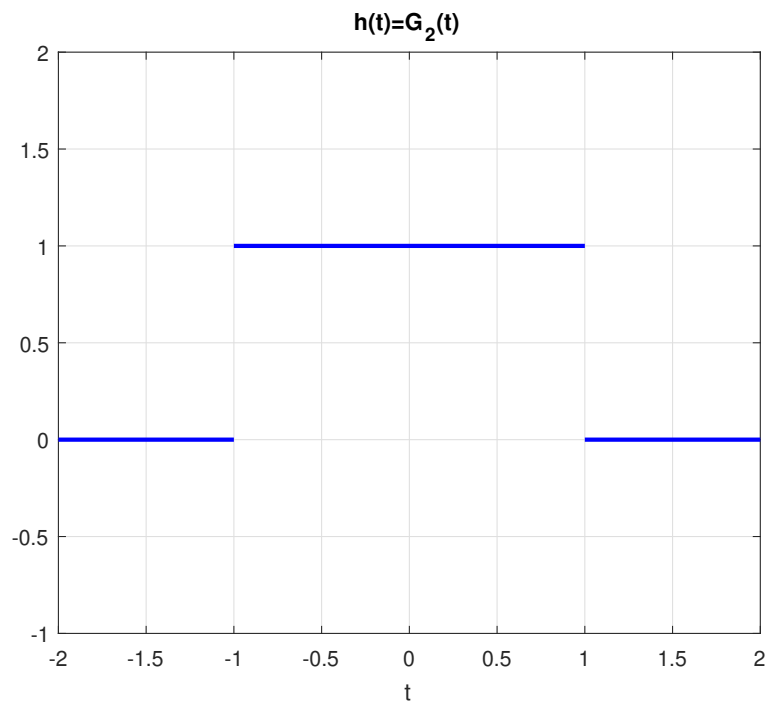
1) Esboce as respostas ao impulso de sistemas lineares invariantes no tempo dadas abaixo e classifique os sistemas quanto à BIBO estabilidade e à causalidade

a) $h(t) = t^2 G_2(t)$ b) $h(t) = \exp(-|t|)$

c) $h(t) = G_2(t)$ d) $h(t) = (2t + 4)G_1(t + 1.5) - 2tG_2(t) + (2t - 4)G_1(t - 1.5)$

As figuras mostram os sinais:





a) Não causal, pois $h(t) \neq 0$, $t \in (-1, 0)$, e BIBO-estável, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3} < +\infty$$

b) Não causal, pois $h(t) \neq 0$, $t < 0$, e BIBO-estável, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|t|) dt = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt = -2 \exp(-t) \Big|_0^{+\infty} = 2 < +\infty$$

c) Não causal, pois $h(t) \neq 0$, $t < 0$, e BIBO-estável, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-1}^1 dt = 2 < +\infty$$

d) Não causal, pois $h(t) \neq 0$, $t < 0$, e BIBO-estável, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = 2(2 \times 2)/2 = 4 < +\infty$$

2) Classifique quanto à BIBO estabilidade, causalidade e invariância no tempo o sistema descrito por

$$\text{a) } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta) \exp(-t + \beta) u(t - \beta) d\beta \quad \text{b) } y(t) = \int_{-\infty}^{t+2} x(\beta) d\beta$$

$$\text{c) } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta u(\beta) x(t - \beta) d\beta \quad \text{d) } y(t) = \int_{t-1}^t x(\beta) d\beta$$

a) Sistema linear invariante no tempo, pois

$$h(t) = \exp(-t)u(t), \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

causal ($h(t) = 0, t < 0$) e BIBO-estável, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt = -\exp(-t) \Big|_0^{+\infty} = 1 < +\infty$$

b) Sistema linear invariante no tempo, pois

$$h(t) = u(t+2), \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta) u(t+2-\beta) d\beta = \int_{-\infty}^{t+2} x(\beta) d\beta$$

não causal ($h(t) \neq 0, t < 0$) e não BIBO-estável, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-1}^{+\infty} 1 dt \rightarrow +\infty$$

c) Sistema linear invariante no tempo, pois

$$h(t) = tu(t), \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

causal ($h(t) = 0, t < 0$) e não BIBO-estável, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^{+\infty} t dt \rightarrow +\infty$$

d) Sistema linear invariante no tempo, pois

$$y(t) = \int_{t-1}^t x(\beta) d\beta = \int_{-\infty}^t x(\beta) d\beta - \int_{-\infty}^{t-1} x(\beta) d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta) u(t-\beta) d\beta - \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta) u(t-1-\beta) d\beta$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta) (u(t-\beta) - u(t-1-\beta)) d\beta$$

$$\Rightarrow h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\beta) (u(t-\beta) - u(t-1-\beta)) d\beta = u(t) - u(t-1) = G_1(t-0.5)$$

e $y(t) = x(t) * h(t)$. Causal ($h(t) = 0, t < 0$) e BIBO-estável, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^1 dt = 1 < +\infty$$

3) Classifique quanto a linearidade, BIBO estabilidade, invariância com o tempo, e causalidade, o sistema descrito por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\beta} x(t - \beta) d\beta$$

Sistema linear e invariante no tempo, pois

$$y(t) = x(t) * h(t), \quad h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

não causal ($h(t) \neq 0, t < 0$) e não BIBO-estável, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \frac{2}{\pi} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{+\infty} \rightarrow +\infty$$

4) Considere o sistema SISO (*Single-Input Single-Output*)

$$y(t) = \mathcal{G}\{x(t)\} = \int_{t-1}^{t+1} (t - \beta)x(\beta) d\beta$$

a) Determine e esboce a resposta ao impulso

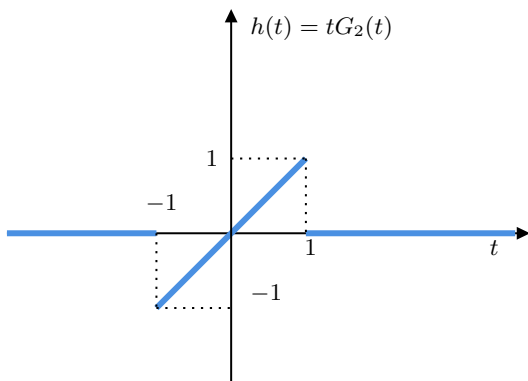
b) O sistema é linear? É invariante no tempo? É causal? É BIBO-estável?

c) Determine a saída $y(t)$ para $x(t) = \delta(t) - \delta(t - 1)$

d) Determine a saída $y(t)$ para $x(t) = u(t) - u(t - 1)$

a) Como a variável de integração β é tal que $t - 1 < \beta < t + 1$, tem-se

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{t-1}^{t+1} (t - \beta)\delta(\beta) d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \beta)\delta(\beta)(u(t + 1 - \beta) - u(t - 1 - \beta)) d\beta \\ \Rightarrow h(t) &= t(u(t + 1) - u(t - 1)) = tG_2(t) \end{aligned}$$



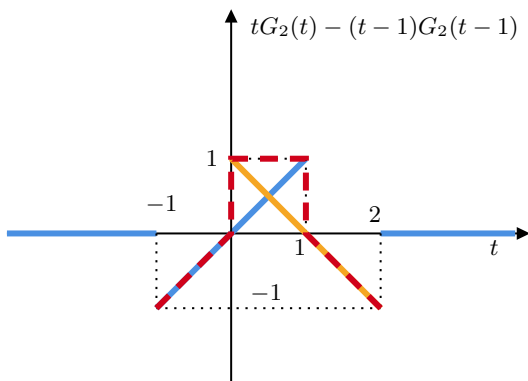
b) O sistema é linear e invariante no tempo, pois

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)(t - \beta)(\beta)(u(t + 1 - \beta) - u(t - 1 - \beta)) d\beta$$

não é causal, pois $h(t) \neq 0$ para $t \in (-1, 0)$, e é BIBO-estável pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = 1 < +\infty$$

c) $y(t) = tG_2(t) - (t-1)G_2(t-1)$ (tracejado vermelho)



d) $y_d(t) = \int_{-\infty}^t y_c(t) dt$ (igual à integral da resposta anterior)

$t \in (-\infty, -1)$: $y(t) = 0$

$t \in (-1, 0)$:

$$y(t) = \int_{-1}^t \beta d\beta = \frac{\beta^2}{2} \Big|_{-1}^t = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$t \in (0, 1)$:

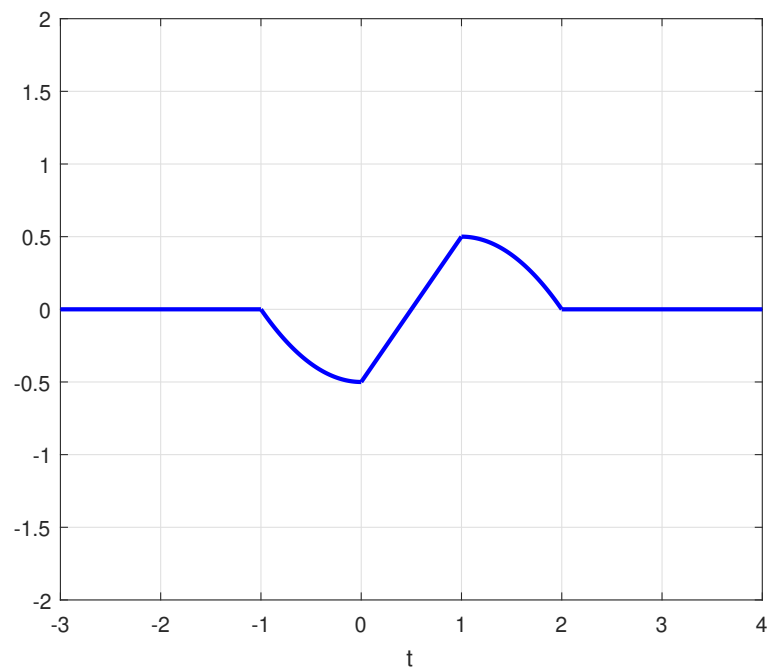
$$y(t) = -\frac{1}{2} + \int_0^t d\beta = -\frac{1}{2} + t$$

$t \in (1, 2)$:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \int_1^t (-\beta + 1) d\beta = -\frac{t^2}{2} + t$$

$t \in (2, +\infty)$: $y(t) = 0$

A figura mostra o resultado



5) Esboce a saída de um sistema linear e invariante no tempo cuja resposta ao impulso é

$$h(t) = u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)$$

para a entrada:

a) $x(t) = u(t)$ b) $x(t) = -u(t) + 2u(t-1) - u(t-2)$

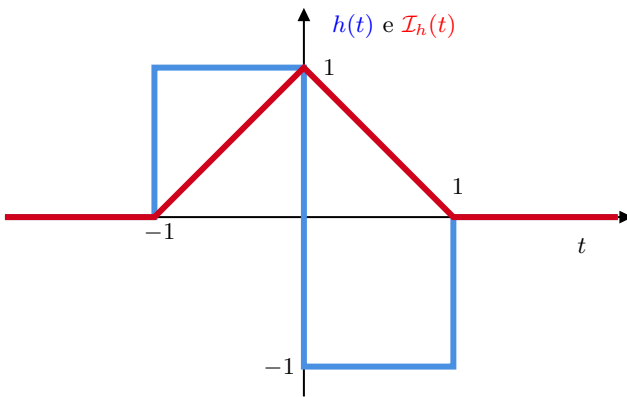
a) $y(t) = h(t) * x(t)$, $x(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = h(t) * u(t) = \mathcal{I}_h(t) = (t+1)u(t+1) - 2tu(t) + (t-1)u(t-1)$

Computando por partes:

$$y(t) = 0, t \in (-\infty, -1), \quad y(t) = \int_{-1}^t d\beta = (t+1), t \in (-1, 0)$$

$$y(t) = \int_{-1}^0 d\beta + \int_0^t (-1)d\beta = 1 - t, t \in (0, 1), \quad y(t) = \int_{-1}^0 d\beta + \int_0^1 (-1)d\beta = 0, t \in (1, +\infty)$$

A figura ilustra $h(t)$ (azul) e $\mathcal{I}_h(t)$ (vermelho)

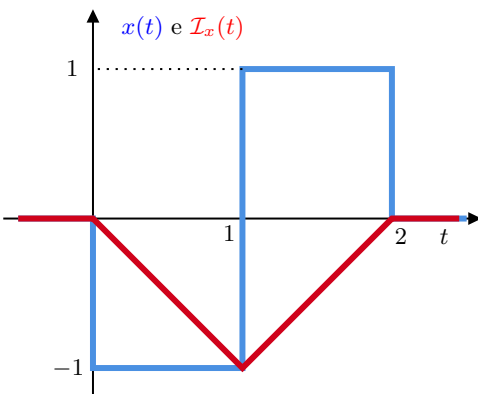


Note que

$$h(t) = G_1(t+0.5) - G_1(t-0.5), \quad \mathcal{I}_h(t) = \text{Tri}_2(t)$$

b) $x(t) = -u(t) + 2u(t-1) - u(t-2)$, $\mathcal{I}_x(t) = -tu(t) + 2(t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2)$

A figura mostra $x(t)$ e $\mathcal{I}_x(t)$



A saída é dada por $y(t) = h(t) * x(t) = (u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)) * x(t) = \mathcal{I}_x(t+1) - 2\mathcal{I}_x(t) + \mathcal{I}_x(t-1)$

$$y(t) = (- (t+1)u(t+1) + 2tu(t) - (t-1)u(t-1)) - 2(-tu(t) + 2(t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2)) \\ + (- (t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3))$$

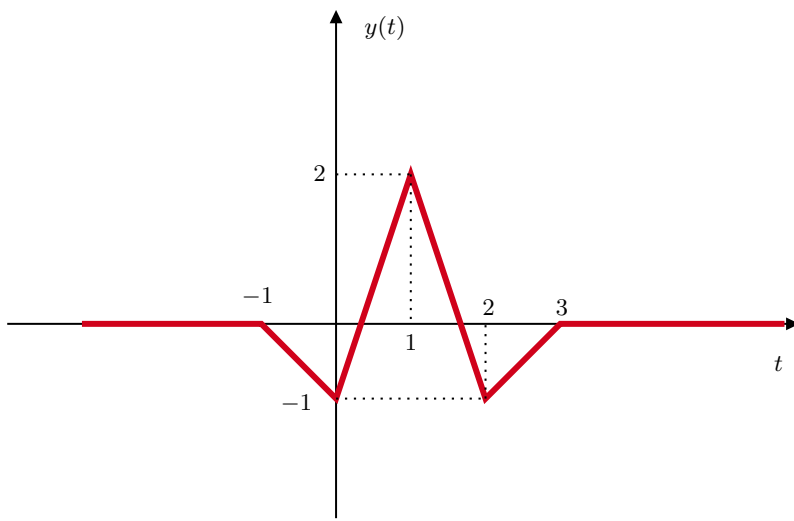
$$\Rightarrow y(t) = -(t+1)u(t+1) + 4tu(t) - 6(t-1)u(t-1) + 4(t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3)$$

Os pontos no eixo t que definem os diferentes trechos de reta são: $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Assim, considerando o limite à esquerda dos pontos, tem-se

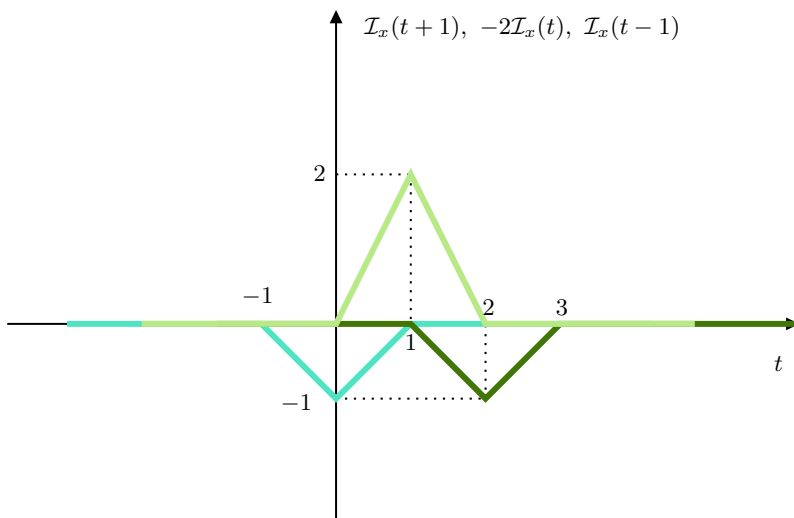
$$y(t < -1) = 0, \quad y(-1) = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(1) = -2 + 4 = 2, \quad y(2) = -3 + 8 - 6 = -1,$$

$$y(3) = -4 + 12 - 12 + 4 = 0, \quad y(t > 3) = -(t+1) + 4t - 6(t-1) + 4(t-2) - (t-3) = 0$$

A figura mostra $y(t)$ final



As parcelas $\mathcal{I}_x(t+1)$, $-2\mathcal{I}_x(t)$ e $\mathcal{I}_x(t-1)$ são mostradas na figura a seguir em diferentes tons. Como pode ser verificado, a soma das parcelas produz o sinal $y(t)$.



6) Determine a saída $y(t)$ do sistema linear e invariante no tempo cuja resposta ao impulso é

$$\mathcal{G}\{\delta(t)\} = 900(\exp(-3t)u(t)) * (\exp(-3t)u(t))$$

para a entrada $x(t) = 4\sin(2t)\cos(3t)$

$$h(t) = 900 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-3\beta)u(\beta) \exp(-3(t-\beta))u(t-\beta)d\beta = 900 \left(\int_0^t \exp(-3\beta) \exp(-3(t-\beta))d\beta \right) u(t)$$

$$= 900 \exp(-3t) \left(\int_0^t d\beta \right) u(t) = 900t \exp(-3t)u(t)$$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = 900\mathcal{L}\{\exp(-3t)u(t)\}\mathcal{L}\{(\exp(-3t)u(t))\} = \frac{900}{(s+3)^2}, \text{Re}(s) > -3$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 4\sin(2t)\cos(3t) = 4 \left(\frac{1}{2j} \exp(j2t) - \frac{1}{2j} \exp(-j2t) \right) \left(\frac{1}{2} \exp(j3t) + \frac{1}{2} \exp(-j3t) \right) \\ &= \frac{1}{j} (\exp(j5t) + \exp(-jt) - \exp(jt) - \exp(-j5t)) \end{aligned}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2j} \exp(j5t) - \frac{1}{2j} \exp(-j5t) \right) + 2 \left(\frac{1}{2j} \exp(jt) - \frac{1}{2j} \exp(-jt) \right) = 2\sin(5t) - 2\sin(t)$$

$$y_f(t) = 2|H(j5)|\sin(5t + \angle(H(j5))) - 2|H(j)|\sin(t + \angle(H(j)))$$

$$H(j5) = \frac{900}{(3+j5)^2}, |H(j5)| \approx 26.5, \angle(H(j5)) \approx -2.06$$

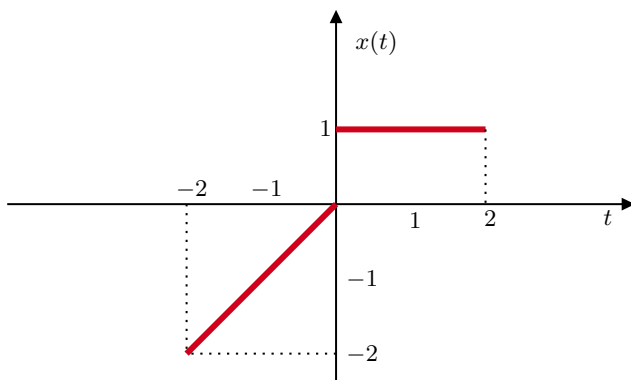
$$H(j) = \frac{900}{(3+j)^2}, |H(j)| \approx 90, \angle(H(j)) \approx -0.64$$

$$y_f(t) \approx 53\sin(5t - 2.06) - 180\sin(t - 0.64)$$

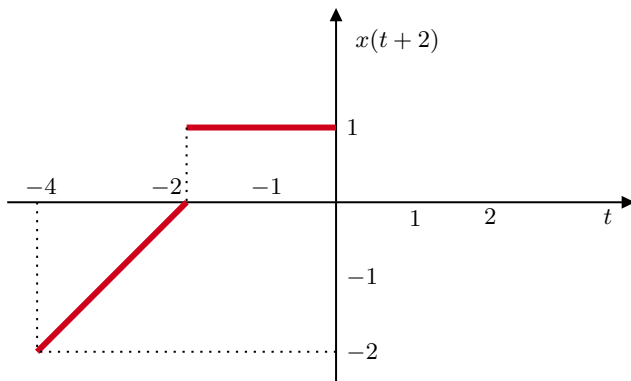
7) Esboce $x(-2t+2)$ e $\dot{x}(t)$ para

$$x(t) = t(u(t+2) - u(t)) + (u(t) - u(t-2))$$

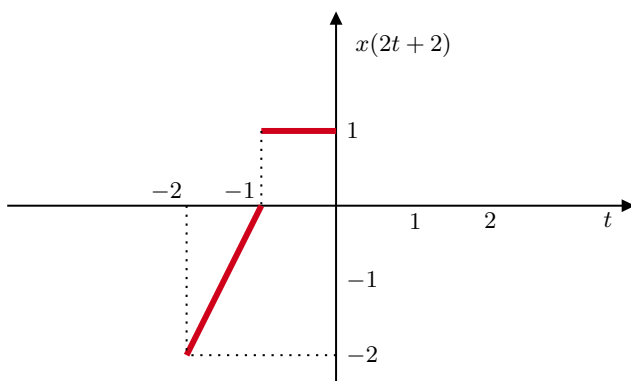
Sinal: $x(t) = tG_2(t+1) + G_2(t-1)$



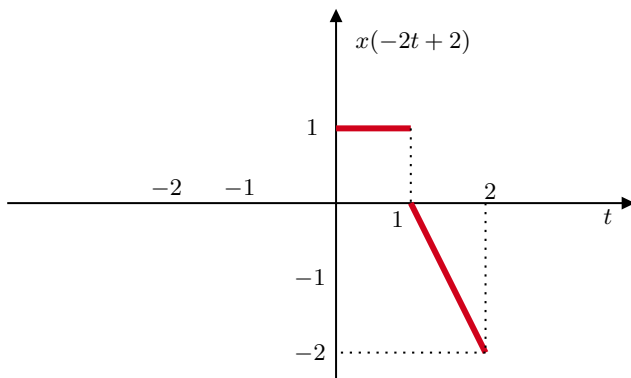
Deslocando: $x(t+2) = (t+2)G_2(t+3) + G_2(t+1)$



Escalonando: $x(2t+2) = (2t+2)G_1(t+1.5) + G_1(t+0.5)$



Reversão no tempo: $x(-2t+2) = G_1(t-0.5) + (-2t+2)G_1(t-1.5)$

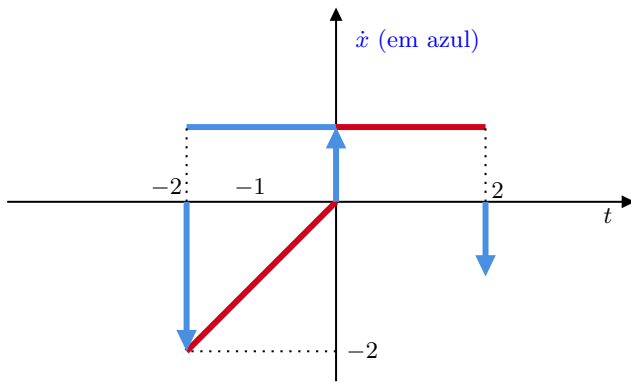


Calculando $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = u(t+2) - u(t) + t(\delta(t+2) - \delta(t)) + \delta(t) - \delta(t-2) = G_2(t+1) - 2\delta(t+2) + \delta(t) - \delta(t-2)$$

pois $t\delta(t+2) = -2\delta(t+2)$ e $t\delta(t) = 0\delta(t) = 0$.

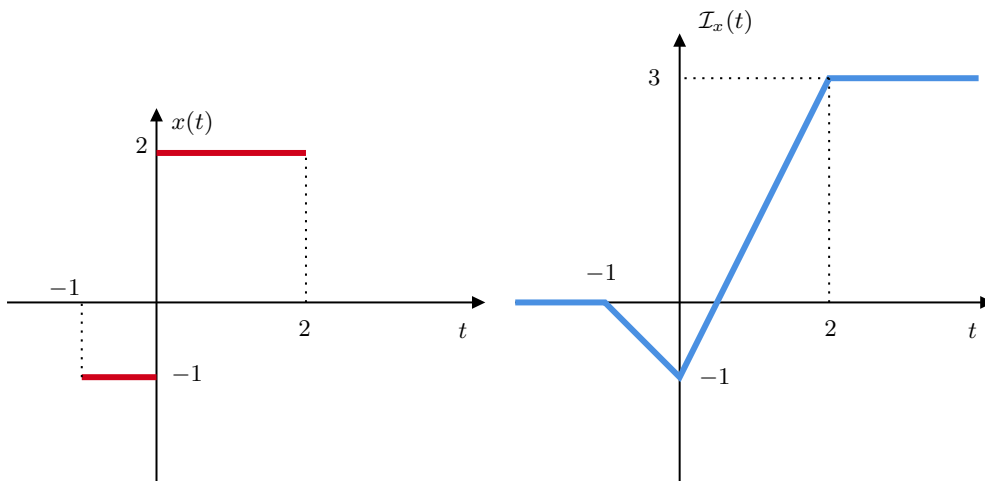
A derivada de uma descontinuidade produz um impulso de amplitude igual à diferença entre os valores à esquerda e à direita da descontinuidade: em $t = -2$, o sinal vermelho vale 0 à esquerda e -2 à direita, produzindo $-2\delta(t+2)$ como derivada; em $t = 0$, o sinal vermelho passa de 0 a 1 (derivada $\delta(t)$) e em $t = 2$ vai de 1 para 0 (derivada $-\delta(t-2)$). No intervalo $(-2, 0)$ $\dot{x}(t)$ é igual a 1 e no intervalo $(0, 2)$ $\dot{x}(t) = 0$.



8) Esboce $y(t) = x(t) * x(t)$ para

$$x(t) = -u(t+1) + 3u(t) - 2u(t-2)$$

Sinais $x(t)$ e $\mathcal{I}_x(t)$



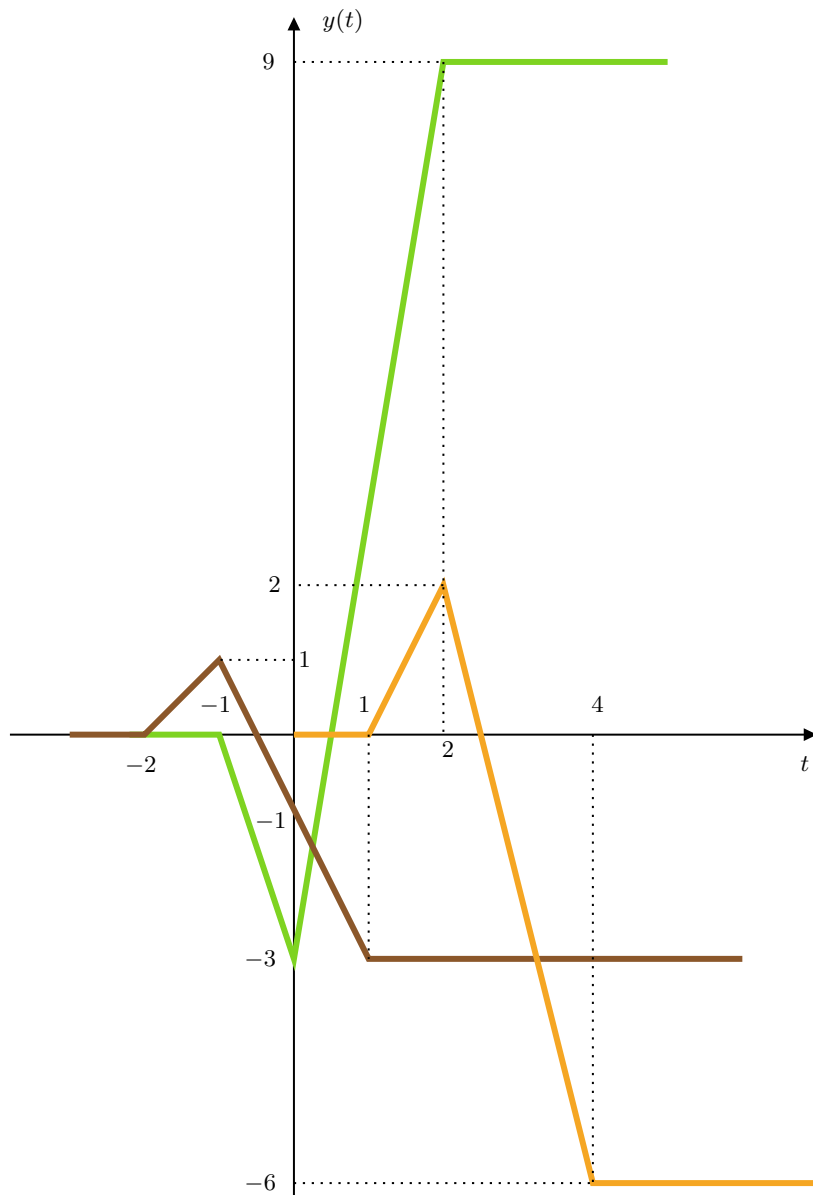
A expressão de $\mathcal{I}_x(t)$ pode ser obtida: $(-\infty, -1) : \mathcal{I}_x(t) = 0$,

$$(-1, 0) : \mathcal{I}_x(t) = \int_{-1}^t (-1) d\beta = -t - 1, \quad (0, 2) : \mathcal{I}_x(t) = -1 + \int_0^t (2) d\beta = 2t - 1, \quad (2, +\infty) : \mathcal{I}_x(t) = 3$$

Como $x(t)$ é composto por degraus deslocados, $x(t) * u(t) = \mathcal{I}_x(t)$ e $x(t) * u(t - \tau) = \mathcal{I}_x(t - \tau)$, tem-se

$$y(t) = x(t) * x(t) = -\mathcal{I}_x(t+1) + 3\mathcal{I}_x(t) - 2\mathcal{I}_x(t-2)$$

A figura a seguir ilustra as três parcelas de $y(t)$.

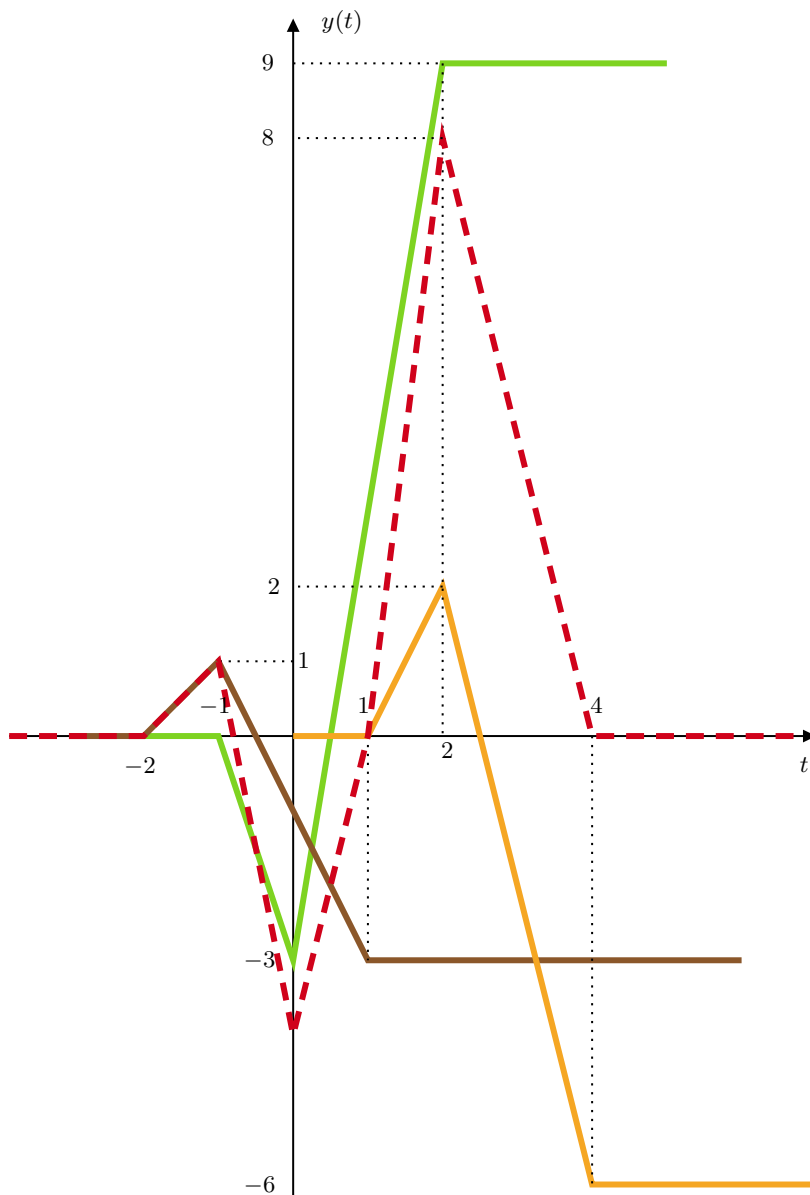


O resultado final é dado pela soma das parcelas, que devem ser particionadas em trechos nos quais cada parcela seja descrita por uma reta: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ e $(4, +\infty)$. A partir desses trechos, identificam-se os pontos que, em cada intervalo, definem um trecho de reta (de baixo para cima):

$$t = -2 : 0 + 0 = 0; \quad t = -1 : 0 + 1 = 1; \quad t = 0 : -3 - 1 = -4; \quad t = 1 : -3 + 0 + 3 = 0;$$

$$t = 2 : -3 + 2 + 9 = 8; \quad t = 4 : -6 - 3 + 9 = 0$$

A figura abaixo ilustra (em tracejado vermelho) o resultado da convolução.



Note que a largura do pulso resultante é igual à soma das larguras dos pulsos $x(t)$

Uma alternativa à soma de trechos de reta é dada pela utilização da propriedade:

$$v(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow y(t) = x(t) * x(t) = x(t) * \mathcal{I}_v(t) = \mathcal{I}_{x(t)*v(t)}$$

No exemplo, tem-se:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(-u(t+1) + 3u(t) - 2u(t-2)) = -\delta(t+1) + 3\delta(t) - 2\delta(t-2)$$

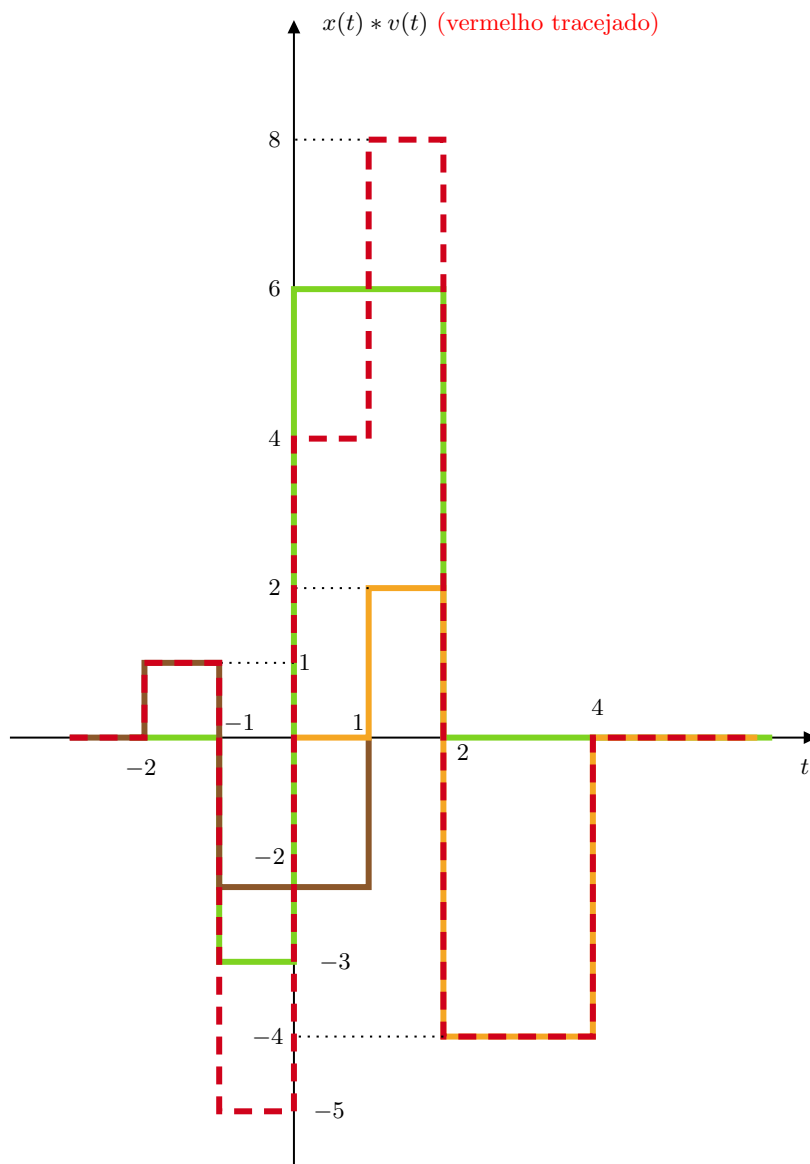
e a convolução de $x(t)$ com impulsos deslocados produz (em marrom, verde e laranja)

$$x(t) * v(t) = -x(t+1) + 3x(t) - 2x(t-2)$$

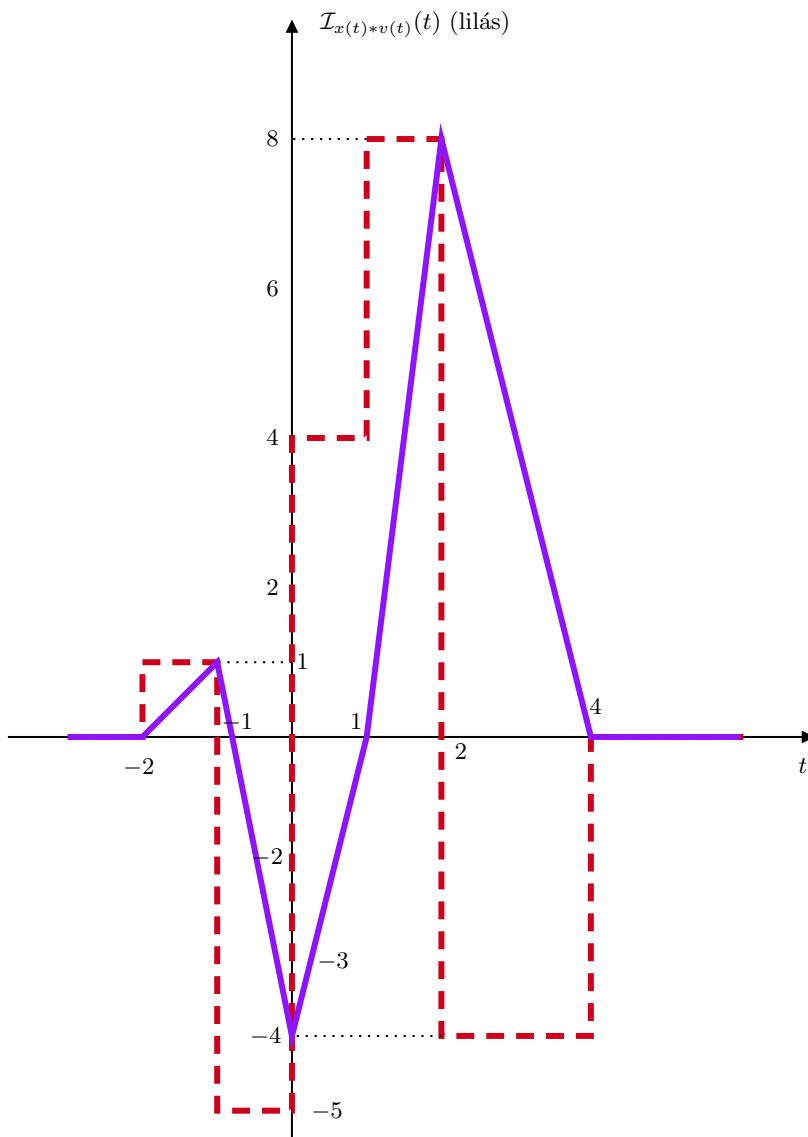
ou, em termos dos degraus,

$$\begin{aligned} x(t) * v(t) &= (-u(t+1) + 3u(t) - 2u(t-2)) * (-\delta(t+1) + 3\delta(t) - 2\delta(t-2)) \\ &= u(t+2) - 3\delta(t+1) + 2\delta(t-1) - 3u(t+1) + 9u(t) - 6u(t-2) + 2u(t-1) - 6u(t-2) + 4u(t-4) \\ &= u(t+2) - 6u(t+1) + 9u(t) + 4u(t-1) - 12u(t-2) + 4u(t-4) \end{aligned}$$

como ilustrado na figura (resultado em tracejado vermelho)



Finalmente, $y(t)$ pode ser obtido a partir da integral de $x(t) * v(t)$ (note que para se determinar os pontos que definem a curva $\mathcal{I}_{x(t)*v(t)}$, basta ir somando as áreas associadas aos retângulos).



9) Determine $H(s)$ (transformada de Laplace da resposta ao impulso) do sistema descrito por

$$\dot{v}_1 + v_2 = x ; \quad \dot{v}_2 + v_1 = 2\dot{x} ; \quad y = 2x + v_1 + v_2$$

e a saída $y(t)$ para a entrada $x(t) = 200 \cos^2(t)$.

Usando a notação $p = \frac{d}{dt}$, tem-se $pv_1 + v_2 = x$, $pv_2 + v_1 = 2px$, $y = 2x + v_1 + v_2$

$$\Rightarrow (pv_2 + v_1 = 2px) - (p)(pv_1 + v_2 = x) \Rightarrow (1 - p^2)v_1 = px, \quad v_1 = \frac{-px}{p^2 - 1}$$

$$v_2 = x - pv_1 = x + \frac{p^2x}{p^2 - 1} = \frac{(2p^2 - 1)x}{p^2 - 1}, \quad y = 2x - \frac{px}{p^2 - 1} + \frac{(2p^2 - 1)x}{p^2 - 1} = \frac{(4p^2 - p - 3)x}{p^2 - 1}$$

$$(p^2 - 1)y = (4p^2 - p - 3)x \Rightarrow H(s) = \frac{4p^2 - p - 3}{p^2 - 1} \Big|_{p=s} = \frac{4s^2 - s - 3}{s^2 - 1} = \frac{(4s + 3)(s - 1)}{(s + 1)(s - 1)} = \frac{(4s + 3)}{(s + 1)}$$

Para a entrada

$$x(t) = 200 \left(\frac{1}{2} \exp(jt) + \frac{1}{2} \exp(-jt) \right)^2 = 200 \left(\frac{1}{4} \exp(j3t) + \frac{1}{4} \exp(-j2t) + \frac{1}{2} \right) = 100 + 100 \cos(2t)$$

tem-se, como $h(t)$ é real (pois $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$),

$$y_f(t) = 100H(0) + 100|H(j2)| \cos(2t + \angle H(j2)) \approx 300 + 382 \cos(2t + 0.105)$$

10) Determine e esboce $M(\omega)$ (módulo da resposta em frequência) para $|\omega| < 2\pi/T$ do sistema linear invariante no tempo

$$\mathcal{G}\{x(t)\} = \frac{2x(t) + x(t+T) + x(t-T)}{2}, \quad T > 0$$

A relação entrada-saída pode ser obtida com o conceito de autofunção:

$$x(t) = \exp(st) \Rightarrow y(t) = H(s) \exp(st)$$

que resulta em

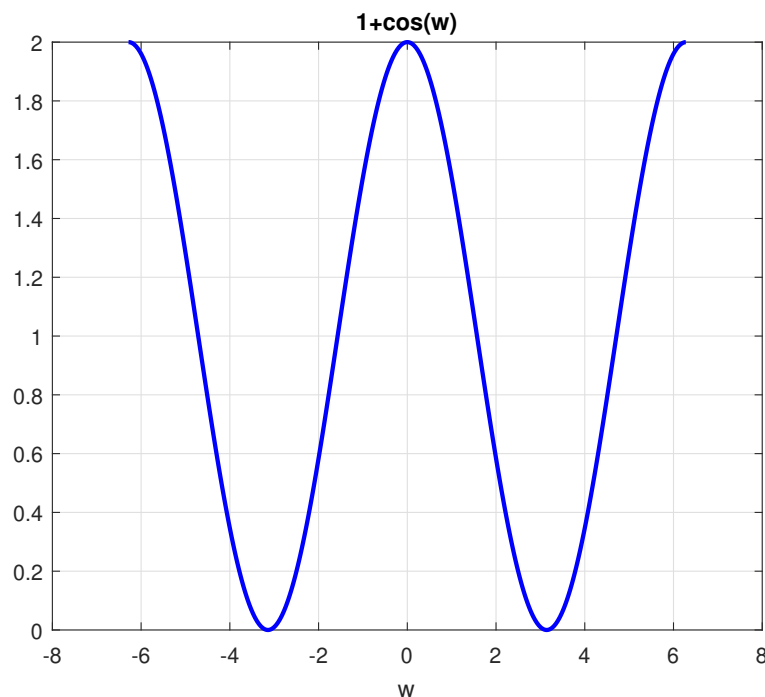
$$Y(s) = H(s) \exp(st) = \frac{2 \exp(st) + \exp(s(t+T)) + \exp(s(t-T))}{2}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{2 + \exp(sT) + \exp(-sT)}{2} = 1 + \cosh(sT)$$

$$H(j\omega) = M(\omega) \exp(j\phi(\omega)) = 1 + \cosh(j\omega T) = 1 + \frac{\exp(j\omega T) + \exp(-j\omega T)}{2} = 1 + \cos(\omega T)$$

$$\Rightarrow M(\omega) = 1 + \cos(\omega T), \quad \phi(\omega) = 0$$

A figura mostra $M(\omega)$ para $T = 1$.



11) a) Determine e esboce $M(\omega)$ (módulo da resposta em frequência) para $|\omega| < 2\pi/T$ para o sistema linear invariante no tempo

$$\mathcal{G}\{x(t)\} = \frac{2x(t) - x(t+T) - x(t-T)}{4}, \quad T > 0$$

Com o conceito de autofunção

$$x(t) = \exp(st) \Rightarrow y(t) = H(s) \exp(st)$$

tem-se

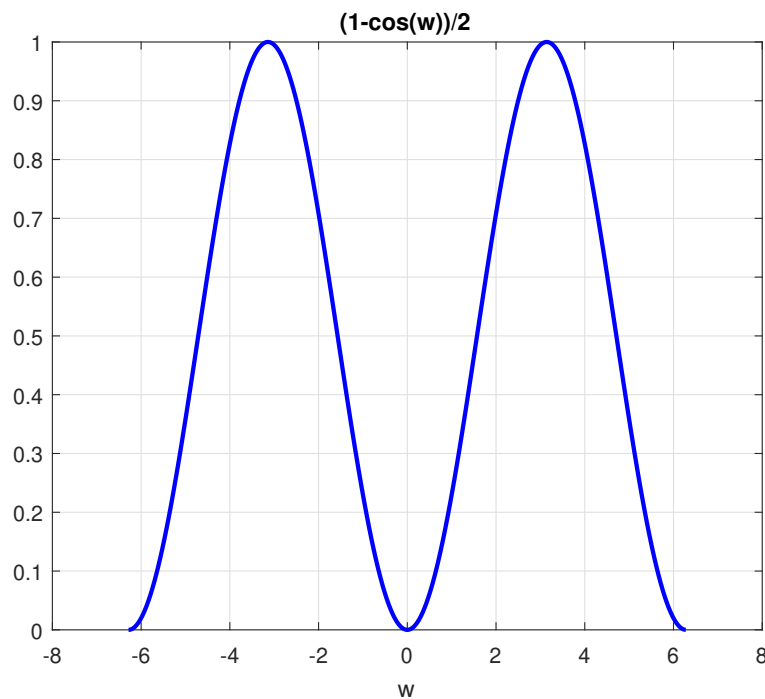
$$Y(s) = H(s) \exp(st) = \frac{2 \exp(st) - \exp(s(t+T)) - \exp(s(t-T))}{4} = \exp(sT) \left(\frac{2 - (\exp(sT) + \exp(-sT))}{4} \right)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{2 - (\exp(sT) + \exp(-sT))}{4} = \frac{1 - \cosh(sT)}{2}$$

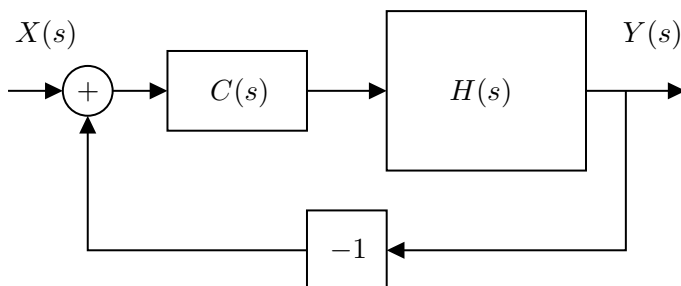
$$H(j\omega) = M(\omega) \exp(j\phi(\omega)) = \frac{1}{2} - \frac{\cosh(j\omega T)}{2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{\exp(j\omega T) + \exp(-j\omega T)}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(\omega T)}{2}$$

$$\Rightarrow M(\omega) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(\omega T)}{2}, \quad \phi(\omega) = 0$$

A figura mostra $M(\omega)$ para $T = 1$.



12) Determine a saída $y(t)$ do sistema abaixo para a entrada $x(t) = 5 \exp(-2t)$



$$C(s) = \frac{100}{s}, \quad H(s) = \frac{s+1}{s+10}$$

$$Y(s) = (X(s) - Y(s))C(s)H(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)}$$

Se

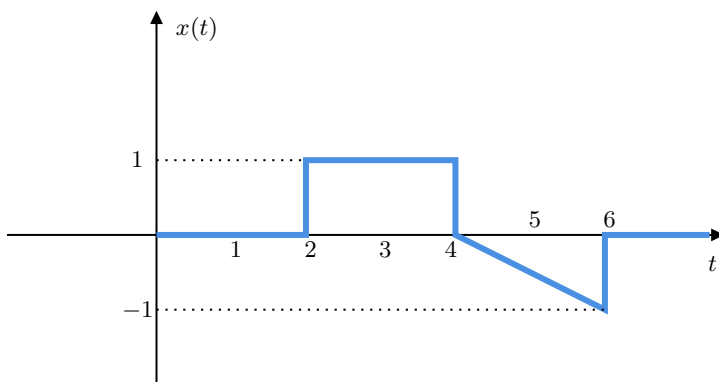
$$C(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{B(s)N(s)}{A(s)D(s) + B(s)N(s)}$$

Para

$$C(s) = \frac{100}{s}, \quad H(s) = \frac{s+1}{s+10} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{100(s+1)}{s^2 + 10s + 100(s+1)} = \frac{100s + 100}{s^2 + 110s + 100}$$

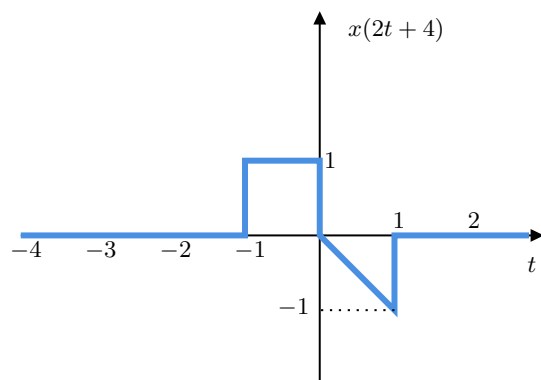
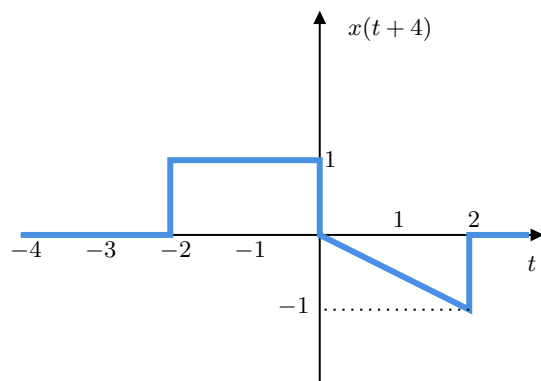
$$x(t) = 5 \exp(-2t) \quad \Rightarrow \quad y_f(t) = H(-2)5 \exp(-2t) = \left(\frac{-100}{-116} \right) 5 \exp(-2t) = \frac{125}{29} \exp(-2t)$$

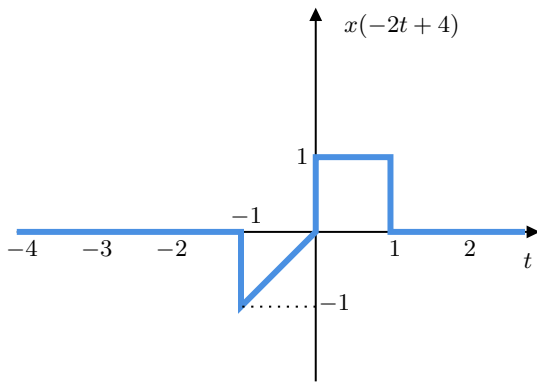
13) Considere $x(t)$ mostrado na figura abaixo



a) Esboce $y(t) = x(-2t + 4)$

b) Determine (expressão usando degraus e impulsos) e esboce $\dot{x}(t)$



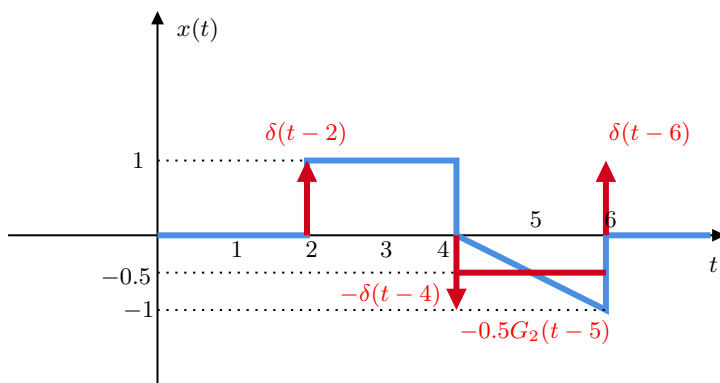


Note que

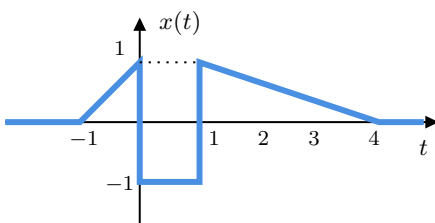
$$x(t) = G_2(t-3) + (2-t/2)G_2(t-5) = (u(t-2) - u(t-4)) + (2-t/2)(u(t-4) - u(t-6))$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \delta(t-2) - \delta(t-4) - \frac{1}{2}(u(t-4) - u(t-6)) + (2-t/2)(\delta(t-4) - \delta(t-6)) \\ &= \delta(t-2) - \delta(t-4) - \frac{1}{2} \underbrace{(u(t-4) - u(t-6))}_{G_2(t-5)} + \delta(t-6) \end{aligned}$$



14) Determine a expressão analítica de $x(t)$ descrito na figura abaixo, usando degraus para definir os diferentes intervalos e esboce $\dot{x}(t)$



Usando funções do tipo *Gate* (i.e., $G_T(t)$), tem-se

$$x(t) = (t+1)G_1(t+0.5) - G_1(t-0.5) + (-t/3 + 4/3)G_3(t-2.5)$$

ou, em termos de degraus,

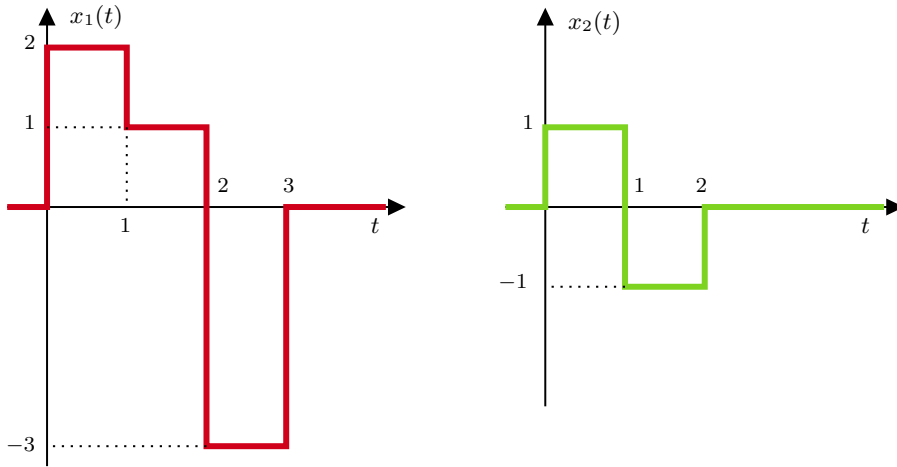
$$\begin{aligned} x(t) &= (t+1)(u(t+1) - u(t)) - (u(t) - u(t-1)) + (-t/3 + 4/3)(u(t-1) - u(t-4)) \\ &= (t+1)u(t+1) - tu(t) - 2u(t) + u(t-1) + \frac{(4-t)}{3}u(t-1) - \frac{(4-t)}{3}u(t-4) \end{aligned}$$

Note que, para $t > 4$, todos os degraus valem 1 e a soma dos termos é igual a zero.

15) a) Esboce $\mathcal{I}_{x_1}(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\beta) d\beta$ para $x_1(t)$ mostrado na figura abaixo.

b) Expresse $x_2(t)$ como soma ponderada de degraus deslocados

c) Esboce a convolução $x_1(t) * x_2(t)$



a) Note que $\mathcal{I}_{x_1}(t)$ vale zero para $t \leq 0$ e assume o valor total da área sob a função para $t \geq 3$, que também é igual a zero. Computando por intervalos:

$$(-\infty, 0): \mathcal{I}_{x_1}(t) = 0$$

$$(0, 1): \mathcal{I}_{x_1}(t) = \int_0^t (2) d\beta = 2t$$

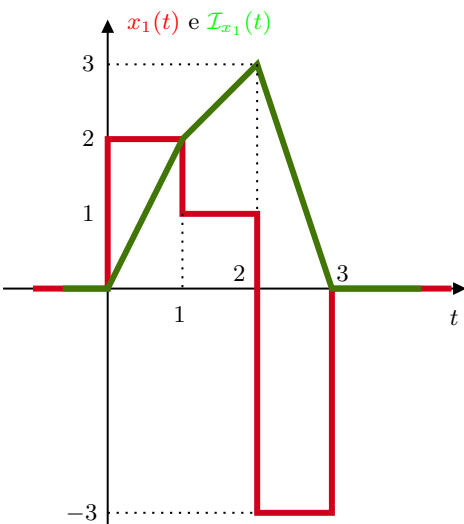
$$(1, 2): \mathcal{I}_{x_1}(t) = 2 + \int_1^t (1) d\beta = 2 + t - 1 = t + 1$$

$$(2, 3): \mathcal{I}_{x_1}(t) = 3 + \int_2^t (-3) d\beta = 3 + (-3)(t - 2) = -3t + 9$$

$$(3, +\infty): \mathcal{I}_{x_1}(t) = 0$$

A figura ilustra $\mathcal{I}_{x_1}(t)$, que pode ser expresso como

$$\mathcal{I}_{x_1}(t) = 2tG_1(t - 0.5) + (t + 1)G_1(t - 1.5) + (-3t + 9)G_1(t - 2.5)$$

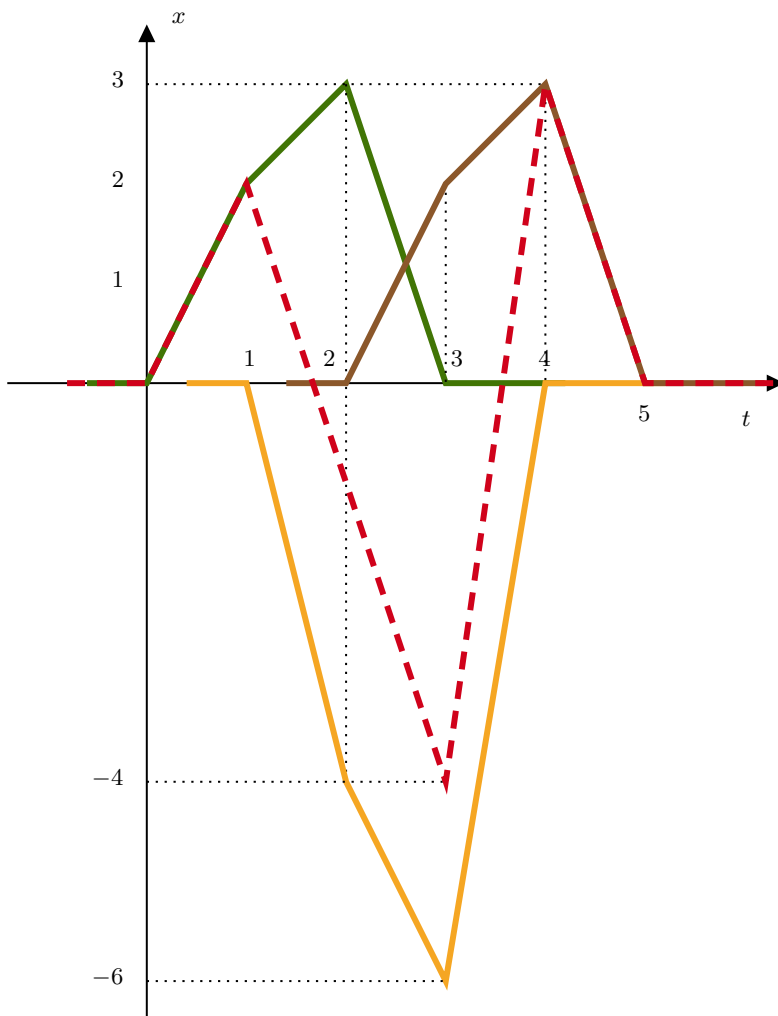


$$\text{b) } x_2(t) = G_1(t-0.5) - G_1(t-1.5) = (u(t) - u(t-1)) - (u(t-1) - u(t-2)) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$$

Portanto, como $x_1(t) * u(t) = \mathcal{I}_{x_1}(t)$, a convolução $x_1(t) * x_2(t)$ produz como resultado

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \mathcal{I}_{x_1}(t) - 2\mathcal{I}_{x_1}(t-1) + \mathcal{I}_{x_1}(t-2) \\ &= 2tG_1(t-0.5) + (t+1)G_1(t-1.5) + (-3t+9)G_1(t-2.5) \\ &\quad - 2(2(t-1)G_1(t-1.5) + tG_1(t-2.5) + (-3(t-1)+9)G_1(t-3.5)) \\ &\quad + 2(t-2)G_1(t-2.5) + (t-1)G_1(t-3.5) + (-3(t-2)+9)G_1(t-4.5) \end{aligned}$$

A figura mostra as três parcelas e o resultado da soma (tracejado vermelho), que pode ser obtido a partir da identificação dos intervalos nos quais as parcelas correspondem a um trecho de reta. Os intervalos são $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ e $(4, 5)$



16) a) Determine a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\dot{\delta}(t)dt$$

sendo $f(t)$ uma função contínua com derivada contínua para todo t .

Dica: $\frac{d}{dt}(x(t) * y(t)) = \dot{x}(t) * y(t) = x(t) * \dot{y}(t)$

b) Determine o valor da integral para $f(t) = 3t - 5$.

c) Usando o resultado do item a), mostre que $t\dot{\delta}(t)$ pode ser substituído por $-\delta(t)$

Usando a dica, tem-se que

$$\frac{d}{dt}(f(t) * \delta(t)) = f(t) * \dot{\delta}(t)$$

Como o impulso é o elemento neutro da convolução, tem-se $f(t) = f(t) * \delta(t)$ e, portanto,

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}(f(t) * \delta(t)) = f(t) * \dot{\delta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\dot{\delta}(t - \beta)d\beta$$

Em $t = 0$, tem-se no integrando $\dot{\delta}(-\beta)$, que é uma função ímpar, ou seja,

$$\dot{\delta}(-\beta) = -\dot{\delta}(\beta) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\dot{\delta}(t)dt = -\dot{f}(0)$$

O resultado pode também ser obtido por integração por partes, que resulta em

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)}_u \underbrace{\dot{\delta}(t)}_{dv} dt = f(t) \underbrace{\delta(t)}_v \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \underbrace{\dot{f}(t)}_{du} dt = -\dot{f}(0)$$

pois o impulso no termo $f(t)\delta(t)$ vale zero quando $t \rightarrow \pm\infty$.

b) $-\dot{f}(0) = -3$ c) $f(t) = t, \quad -\dot{f}(0) = -1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\dot{\delta}(t)dt = -1 = \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta(t)dt \quad \Rightarrow \quad t\dot{\delta}(t) = -\delta(t)$$