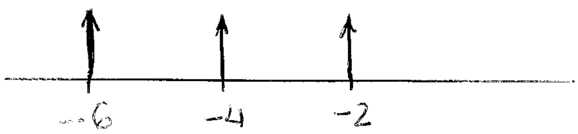
Resolução PR1 – 2016

Questão 1: Dado o sinal discreto $x[n] = \delta[n+3] + \delta[n+1] + \delta[n-1]$, determine e esboce $x[3-2n]$

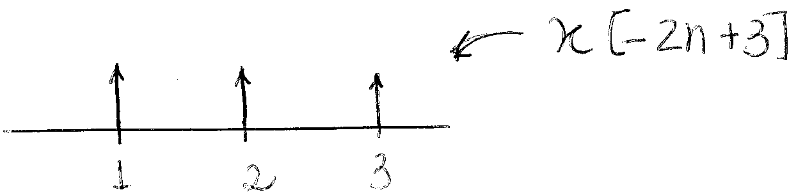
1) Desloque
2) Reverter

1) Deslocar $x[n+3] = \delta[n+6] + \delta[n+4] + \delta[n+2]$



2) Reverter $x[-2n+3]$, onde troque $n \rightarrow -2n$

$$x[-2n+3] = \delta[-2n+6] + \delta[-2n+4] + \delta[-2n+2]$$
$$= \delta[-n+3] + \delta[-n+2] + \delta[-n+1]$$



$$x[-2n+3] = \delta[-n+3] + \delta[-n+2] + \delta[-n+1]$$

$$\boxed{x[-2n+3] = \delta[n-3] + \delta[n-2] + \delta[n-1]}$$

Questão 2: Considere o SLIT descrito por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\rho^{-(n-k)} u[n+1-k] \quad 0<\rho<1$$

a) BIBO estável ou não BIBO estável

Como é um SLIT $y[n] = x[n] * h[n]$

$$h[n] = \rho^{-n} u[n+1] \quad 0<\rho<1$$

Para ser BIBO estável $|h[n]| < \infty$

$$h(n) = \frac{1}{\rho} u[n+1] \quad \text{diverge}$$

$0<\rho<1$

$\therefore$ Não BIBO estável

b) causal ou não causal

para ser causal $h[n] = 0$ para $n<0$

$$h[n] = \rho^{-n} u[n+1] \rightarrow h[-1] = \rho \neq 0$$

$\therefore$ Não causal

Questão 3

a) Determine a função de transferência do SLIT causal dado por

$$y[n] = \rho^{-2} v[n] \qquad v[n] = x[n] - y[n]$$

$$y[n] = x[n-2] - y[n-2]$$

$$y[n] = z^n H(z) \longrightarrow y[n+m] = z^{n+m} H(z)$$
$$x[n] = z^n \longrightarrow x[n+m] = z^{n+m}$$

$$z^n H(z) = z^{n-2} - z^{n-2} H(z)$$

$$H(z)(z^n + z^{n-2}) = z^{n-2}$$

$$H(z) = \frac{z^{n-2}}{z^n + z^{n-2}}$$

Dividindo por z^n

$$\boxed{H(z) = \frac{z^{-2}}{1+z^{-2}} = \frac{1}{1+z^2}}$$

b) Determine a solução forçada para a entrada

$x[n] = \{1, 2, 4, 8, 16, 32 \ldots\}, \ n \geq 0$

$$x[n] = 2^n$$
$$\downarrow$$
$$z$$

$$y_f[n] = H(z)\, x[n]$$
$$y_f[n] = H(2) \cdot 2^n$$

$$y_f[n] = \frac{1}{1+4} \cdot 2^n$$

$$\boxed{y_f[n] = \frac{2^n}{5}}$$

(3)

Questão 4: A sequência $x(n)$ vale zero para $n<0$ e tem transformado z dado por

$$X(z) = \frac{8z^2+4z}{(4z-1)(2z-1)} \qquad |z| > 1/2$$

Determine:

a) $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{8z^2+4z}{8z^2-6z+1} \begin{matrix} \div 8z^2 \\ \div 8z^2 \end{matrix}$$

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{1+\cancel{1/2z}^{\,0}}{1-\cancel{3/4z}^{\,0}+\cancel{1/8z^2}^{\,0}}$$

$$\boxed{x(0) = 1}$$

b) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] = X(1) = \frac{8+4}{3.1} = \frac{12}{3} = \boxed{4}$

Questão 5: Determine e esboce a saída de um SLIT cuja resposta ao impulso é dada por $h(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1) - \delta(n)$ para a entrada $x(n) = \delta(n+1) + 2\delta(n) + \delta(n-1)$

Temos que $y(n) = x(n) * h(n)$

Como é mais complicado fazer a convolução em n fazemos em z e depois voltamos para n!

(4)

$$Y(z) = X(z)\,H(z)$$

Propriedades

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$$

$$\mathcal{Z}\{\delta(n-m)\} = z^{-m}$$

$$\mathcal{Z}\{\delta[n+m]\} = z^{m}$$

$$x[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]$$

$$X(z) = z^{1} + 2 + z^{-1}$$

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$H(z) = z^{1} - 1 + z^{-1}$$

$$Y(z) = X(z)\,H(z) = (z+2+z^{-1})(z-1+z^{-1})$$

$$Y(z) = z^2 - z + 1 + 2z - 2 + 2z^{-1} + 1 - z^{-1} + z^{-2}$$

$$Y(z) = z^2 + z + z^{-1} + z^{-2}$$

↓ Transformada inversa

$$\boxed{y[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n-1] + \delta[n-2]}$$

Questão 6: Determine a sequência $x(n)$ cuja transformada z é dada por

$$X(z) = \frac{2z^2 - 14z}{z^2 - 6z + 8} = \frac{2z^2 - 14z}{(z-2)(z-4)} \qquad |z| < 2$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z - 14}{(z-2)(z-4)} = \frac{A}{(z-2)} + \frac{B}{(z-4)} \qquad A = 5,\; B = -3$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{5}{(z-2)} - \frac{3}{(z-4)} \rightsquigarrow X(z) = \frac{5z}{(z-2)} - \frac{3z}{(z-4)}$$

$$|z| < 2 \longrightarrow$$

utilizando a propriedade

$$\mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \frac{z}{z-a} \quad |z|<|a|$$

$$X(z) = \frac{5z}{(z-2)} - \frac{3z}{(z-4)}$$

$$-5.(2)^n u[-n-1] + 3(4)^n u[-n-1]$$

$$\boxed{x[n] = [-5(2^n) + 3(4)^n]\, u[-n-1]}$$

Questão 7: Para a sequência $x[n] = n2^{-n}u[n]$, determine

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$$

Propriedades

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a} \quad |z|>|a|$$

$$\mathcal{Z}\{n^m x[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z)$$

$$x[n] = n\,\underbrace{2^{-n}u[n]}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1/2} \quad |z|>|1/2|$$

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{2z-1}\right)$$

$$X(z) = -z\left(\frac{2.(2z-1) - 2z(2)}{(2z-1)^2}\right)$$

$$X(z) = \frac{2z}{(2z-1)^2}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = X(1) = \boxed{2}$$

Questão 8 - A transformada z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatório discreto X é dado por

$$\mathcal{E}\{z^X\} = \sum_k z^k Pr\{X=k\} = \frac{26-5z}{z^2-12z+32} = \frac{26-5z}{(z-4)(z-8)}$$

$|z|<4$

a) $Pr\{X=0\} = p(0)$

$$= \frac{26}{32} = \boxed{\frac{13}{16}}$$

b) $Pr\{X=1\} = \left.\frac{d}{dz}\left(\frac{26-5z}{z^2-12z+32}\right)\right|_{z=0}$

$$Pr\{X=1\} = \frac{(-5)(\cancel{z^2}-\cancel{12z}+32) - (26-\cancel{5z})(\cancel{2z}-12)}{(z^2-12z+32)^2}$$

$$= \frac{-5.32 - 26.(-12)}{(32)^2}$$

$$= \frac{-160+312}{1024} = \frac{152}{1024}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 12 \\ \hline 52 \\ 260 \\ \hline 312 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 960 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$= \frac{76}{512} = \frac{38}{256}$$

$$= \boxed{\frac{19}{128}}$$

c) $\mathcal{E}\{X\} = \sum k\,Pr\{X=k\} = z\left.\frac{d}{dz}\left(\frac{26-5z}{z^2-12z+32}\right)\right|_{z=1}$

$$z.\left.\left(\frac{-5(z^2-12z+32)-(26-5z)(2z-12)}{(z^2-12z+32)^2}\right)\right|_{z=1}$$

$$1.\left(\frac{-5.21-21.(-10)}{(21)^2}\right) = \frac{\cancel{21}(-5+10)}{(21)^2}$$

$$\boxed{\frac{5}{21}}$$

Questão 9: Considere o sinal

$$x[n] = 2\sin(\pi/4\, n + \pi/6) + 3\cos(\pi/3\, n + \pi/4)$$

a) Determine o período fundamental N de x[n]

$$\frac{\pi}{4} = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \qquad \frac{\pi}{3} = 2\pi \cdot \frac{1}{6}$$

$$N = \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{m_1} \cdot 8 = \underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{m_2} \cdot 6 = 24$$

$$\boxed{N = 24}$$

b) Determine os coeficientes c_k

$$x(n) = \frac{1}{2j} \cdot 2 \left(e^{j\overset{\frac{2\pi}{24}3n}{\pi/4\, n}} \cdot e^{j\pi/6} - e^{-j\overset{\frac{2\pi}{24}3n}{\pi/4\, n}} \cdot e^{-j\pi/6} \right)$$

$$+ \frac{3}{2} \left(e^{j\overset{\frac{2\pi}{24}4n}{\pi/3\, n}} \cdot e^{j\pi/4} + e^{\overset{\frac{-2\pi}{24}4n}{-j\pi/3\, n}} \cdot e^{-j\pi/4} \right)$$

$$c_3 = \frac{1}{j} e^{j\pi/6} \qquad c_{-3} = c_{21} = -\frac{1}{j} e^{-j\pi/6}$$

$$c_4 = \frac{3}{2} e^{j\pi/4} \qquad c_{-4} = c_{20} = \frac{3}{2} e^{-j\pi/4}$$

demais nulos

c) $P_m = \sum |c_k|^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ c_3}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ c_{21}}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ c_4}}{\frac{9}{4}} + \underset{\substack{\uparrow \\ c_{20}}}{\frac{9}{4}} = 2 + \frac{9}{2} = \boxed{\frac{13}{2}}$

(8)

Questão 10: Considere o sinal periódico discreto x[n]

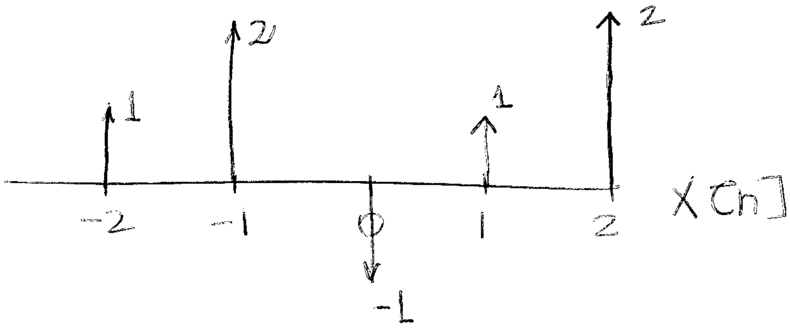
dado por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-k8], \quad p[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] - \delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

a) A expressão dos coeficientes c_k

$$c_k = \frac{1}{N} \sum x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

N = 8



$$c_k = \frac{1}{8} \sum_{-2,-1,0,1,2,3,4,5} x[n]\, e^{j\frac{2\pi}{8}kn}$$

$$c_k = \frac{1}{8}\left(e^{-j\frac{4\pi}{8}k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{8}k} - 1e^{0} + 1e^{j\frac{2\pi}{8}k} + 2e^{j\frac{4\pi}{8}k}\right)$$

$$c_k = \frac{1}{8}\left(e^{+j\pi/2k} + 2e^{+j\pi/4k} - 1 + e^{-j\pi/4k} + 2e^{-j\pi/2k}\right)$$

b) $c_0 = \frac{1}{8}(1+2-\cancel{1}+\cancel{1}+2) = \boxed{5/8}$

$\boxed{P_m = 11/8}$

c) $P_m = \sum |c_k|^2 = \frac{1}{N}\sum |x[n]|^2 \Rightarrow \frac{1}{8}(1+4+1+1+4)$